

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. С.М. КИРОВА

О.И. Мартынюк

**СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО АЛГЕБРЕ
МНОГОЧЛЕНОВ**

Учебно-методическое пособие

**Псков
2010**

УДК 51
ББК 22.14 р
М 294

Мартынюк О.И.

М 294 Сборник упражнений по алгебре многочленов. Учебно-методическое пособие. – Псков: ПГПУ, 2010. – 32 с.

Пособие адресовано преподавателям и студентам физико-математических специальностей и призвано помочь им в осуществлении контроля качества учебно-воспитательного процесса по теме «Многочлены над числовыми полями».

Пособие содержит материал для самостоятельной работы, индивидуальные задания по данной теме и может помочь студентам при изучении курса «Многочлены над числовыми полями».

М 294

Печатается в авторской редакции

© Мартынюк О.И., 2010

Содержание

Предисловие	4
Многочлены над полями комплексных и действительных чисел	5
Многочлены над полем рациональных и кольцом целых чисел	10
Индивидуальные задания	14
Ответы	21

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие содержит материал для самостоятельной работы студентов физико-математических специальностей при изучении курса «Многочлены над числовыми полями». В пособии представлены основные типы заданий по данному разделу: определение приводимости многочлена над полями комплексных, действительных, рациональных чисел; решение уравнений третьей и четвертой степени с действительными коэффициентами, поиск рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами.

В пособии также приведены индивидуальные задания по данной теме.

Пособие адресовано преподавателям и студентам физико-математических специальностей и призвано помочь им в осуществлении контроля качества учебно-воспитательного процесса.

**Многочлены над полями комплексных
и действительных чисел**

1. Следующие многочлены разложите на неприводимые множители над \mathbb{C} и \mathbb{R} .

1) $x^3 - 8$

4) $x^4 + 16$

7) $x^8 - 6x^4 + 9$

2) $x^3 + 8$

5) $x^6 + 27$

8) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 6$

3) $x^4 - 16$

6) $x^6 - 27$

9) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 9$

2. Следующие многочлены разложите на неприводимые множители над \mathbb{C}

1) $x^4 + 4$

2) $x^4 + x^3 - x - 1$

3) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

4) $x^4 - 10x^2 + 1$

3. Следующие многочлены разложите на неприводимые множители над полем действительных чисел

1) $x^9 - 8$

4) $x^3 + x + 2$

6) $x^4 + 2x^2 + 4$

2) $x^6 + x^3 + 1$

5) $x^4 - x^2 + 1$

7) $x^5 - 1$

3) $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$

4. По данным корням постройте многочлен наименьшей степени над \mathbb{C} и \mathbb{R} .

1) двойной корень 1, простые -1 и i

2) тройной корень $1-2i$

3) двойной корень $-1-i$ и двойной корень $-2+i$

5. Постройте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий:

1) двукратный корень 1, простые корни 2, 3, $1+i$

2) простые корни $i-1$, π , $-1+i\sqrt{3}$

3) трехкратный корень $2-3i$

4) двукратный корень i , простой $-1-i$

6. Вычислите табличным методом с точностью до 0,01 действительный корень уравнения, содержащийся в интервале (1,2)

1) $x^4 + 3x^3 - 9x - 9 = 0$ 2) $x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

7. Докажите, что при любом действительном k следующие уравнения имеют только один действительный корень:

1) $x^3 - x^2 + x + k = 0$

2) $x^3 + 7x^2 + 25x + k = 0$

8. Докажите, что следующие многочлены имеют только один действительный корень:

1) $x^3 + 7x^2 + 24x - 1$

2) $x^3 - 5x^2 + 12x + 1$

9. Решите уравнения:

1) $x^3 + 3x^2 - 3x + 4 = 0$

2) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$

3) $3x^3 - 10x^2 + 13x + 14 = 0$

4) $3x^3 - 11x^2 + 28x - 30 = 0$

5) $x^3 - 9x + 12 = 0$

6) $x^3 + 3x + 2i = 0$

7) $x^3 - 3x^2 + 3(1 - 2i)x + 3 + 2i = 0$

8) $x^3 + 1(1 - i)x^2 + (1 - i)x - i = 0$

9) $x^3 - 3x + 2 = 0$

10) $4x^3 - 2(10 - i)x^2 + 10(3 - i)x + 15i = 0$

11) $x^3 - 6x + 4 = 0$

12) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$

13) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$

14) $x^3 + 12x + 63 = 0$

15) $x^3 - 6x + 9 = 0$

16) $x^3 + 6x + 2 = 0$

10. Пользуясь формулой Кардано, найдите с точностью до 0,01 действительный корень уравнений:

1) $x^3 - 2x - 5 = 0$

2) $x^3 + 2x - 30 = 0$

11. Пользуясь формулой Кардано, покажите, что

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -4p - 27q^2,$$

где x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + px + q = 0$

12. Решите уравнения:

1) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3 = 0$

2) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 12x - 24 = 0$

$$3)x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$4)x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5 = 0$$

$$5)x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$6)x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$7)16x^4 + 16x^3 - 48x^2 + 28x - 133 = 0$$

$$8)x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 7 = 0$$

$$9)x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$10)x^4 + 12x + 3 = 0$$

13. Определите количество действительных корни многочленов:

$$1)x^3 + 3x^2 + 3 \quad 2)x^3 - 3x^2 + 2x + 5 \quad 3)x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 1$$

$$4)x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1 \quad 5)x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5$$

$$6)x^4 - 6x^2 - 4x + 18$$

14. Составьте последовательность многочленов Штурма и определите число действительных корней многочленов:

$$1)x^3 - 3x - 1$$

$$4)x^4 + x^2 - 1$$

$$2)x^4 - 12x^2 - 16x - 4$$

$$5)x^4 + 4x^3 - 12x + 9$$

$$3)x^3 - x + 5$$

$$6)x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

15. Разложите следующие многочлены на неприводимые множители над полем комплексных и полем действительных чисел:

$$1) f(x) = x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7 \quad 2) f(x) = x^4 + x^3 - 5x^3 + 2$$

$$3) f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$$

$$4) f(x) = 5x^4 + 44x^3 + 28x^2 + 4x + 1$$

**Многочлены над полем рациональных чисел
и кольцом целых чисел**

1. Найдите рациональные корни многочленов:

1) $2x^3 + x^2 + 47x - 24$

2) $5x^4 - 6x^3 - 15x^2 + 43x - 30$

3) $12x^4 + 32x^3 + 23x^2 + 15x + 18$

4) $36x^4 - 60x^3 - 47x^2 + 60x + 36$

5) $6x^5 + 6x^4 + 29x^3 + 3x^2 - x + 20$

6) $6x^5 - 6x^4 + 89x^3 + 5x^2 - 19x + 60$

7) $225x^5 - 165x^4 - 401x^3 + 145x^2 + 192x + 36$

8) $54x^5 - 135x^4 + 261x^3 - 322x^2 - 188x - 40$

9) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$

10) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$

11) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$

12) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$

13) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$

14) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$

15) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

16) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$

17) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

2. Покажите, что следующие многочлены неприводимы над полем рациональных чисел.

$$1) f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 3$$

$$2) f(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4x - 3$$

$$3) f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 6$$

$$4) f(x) = x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$$

$$5) f(x) = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$$

$$6) f(x) = 4x^3 + 10x^2 - 5x + 5$$

3. Разложите на неприводимые множители в \mathbb{Q} :

$$1) x^4 - 5x^2 + 6$$

$$2) x^4 + 4x^2 + 4$$

$$3) x^4 + 2x^2 + 9$$

$$4) x^4 + x^2 + 16$$

4. Решите уравнения 4-ой степени, используя для нахождения корней кубической резольвенты метод вычисления рациональных корней:

$$1) 4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$2) 3x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 28x - 15 = 0$$

$$3) x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$$

5. Выпишите все неприводимые многочлены:

1) над полем \mathbb{Z}_2 до 4-ой степени включительно;

2) над полем Z_3 до 3-ой степени включительно;

6. Для каких рациональных α и β многочлен $x^4 + \alpha x^2 + \beta$ приводим в кольце многочленов с рациональными коэффициентами?

7. Для каких целых m и n многочлен $mx^3 + n$ приводим над полем рациональных чисел?

8. Воспользовавшись критерием Эйзенштейна докажите неприводимость следующих многочленов над полем Q :

1) $6x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 28x^2 + 7x - 35$

2) $x^4 - 2x - 6$

3) $x^n + 5$

4) $x^p + p(p - \text{простое})$

5) $x^4 + 1$

6) $x^5 - 4$

7) $x^p - 2px + (p - 1), p - \text{простое}$

8) $x^{p-1} + \dots + x + 1, p - \text{простое}$

9) $x^3 - 12$

10) $2x^5 + 6x^4 - 9x^2 + 12$

11) $x^4 - x^3 + 2x + 1$

$$12) x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$$

$$13) x^5 - 12x^3 + 36x - 12$$

**Индивидуальное задание
по теме «Многочлены над числовыми полями»**

Вариант № 1

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 1$
2. Решить уравнения $x^3 - 6x^2 + 18x - 40 = 0$;
 $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x - 50 = 0$
3. Найти рациональные корни многочлена
 $f(x) = 18x^6 + 3x^5 - 10x^4 - 12x^3 - x^2 + 12x - 4$

Вариант № 2

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 - 9x^2 - 7x - 2$
2. Решить уравнения $x^3 + 3x^2 - 8x - 30 = 0$;
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 20x + 8 = 0$
3. Найти рациональные корни многочлена
 $f(x) = 18x^6 - 15x^5 - 4x^4 + 22x^3 - 15x^2 - 4x + 4$

Вариант № 3

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + x^2 - 5x + 4$
2. Решить уравнения $x^3 - 3x^2 - 50 = 0$; $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$
3. Найти рациональные корни многочлена
 $f(x) = 12x^5 + 20x^4 + 17x^3 + 3x^2 - 5x - 2$

Вариант № 4

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 8x + 8$

2. Решить уравнения $x^3 + 3x^2 - x + 5 = 0$;
 $x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2 = 0$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 6x^5 - 11x^4 + 9\frac{2}{3}x^3 - 2\frac{1}{3}x^2 - 2\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$$

Вариант № 5

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 64x + 60$$

2. Решить уравнения $x^3 + 6x^2 + 18x + 40 = 0$;

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочле-

$$на f(x) = 18x^5 + 9x^4 + x^3 - 13x^2 - 4x + 4$$

Вариант № 6

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 13x^2 - 14x + 20$$

2. Решить уравнения $x^3 + 3x^2 - 23x + 35 = 0$;

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 9x + 4 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 12x^5 - 16x^4 + 11x^3 + 3x^2 - 7x + 2$$

Вариант № 7

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 8x + 8$$

2. Решить уравнения $x^3 - 3x^2 - 5x - 25 = 0$;

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 13x - 12 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 6x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{4}{3}$$

Вариант № 8

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 22x - 12$$

2. Решить уравнения $x^3 + 6x^2 + 13x + 20 = 0$;

$$x^4 + 2x^3 - 8x - 16 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 12x^5 + 4x^4 + x^3 - 9x^2 - x + 2$$

Вариант № 9

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 8x + 16$$

2. Решить уравнения $x^3 + 12x^2 + 46x + 60 = 0$;

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x - 2 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 18x^5 + 27x^4 + 19x^3 - 3x^2 - 12x - 4$$

Вариант № 10

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 9x^2 - 20x + 12$$

2. Решить уравнения $x^3 - 6x^2 - 11x - 40 = 0$;

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 12x^5 - 8x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 9x - 2$$

Вариант № 11

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 21x^3 - 35x^2 + 32x - 12$$

2. Решить уравнения $x^3 + 3x^2 - 5x + 25 = 0$;

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 2x + 40 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 12x^6 + 20x^5 + 11x^4 - 4x^3 - 10x^2 - x + 2$$

Вариант № 12

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 23x + 15$$

2. Решить уравнения $x^3 + 3x^2 + 7x + 85 = 0$;

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 18x^5 - 39x^4 + 17x^3 - 17x^2 + 40x - 16$$

Вариант № 13

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 13x + 3$$

2. Решить уравнения $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0$;

$$x^4 - 3x^2 - 4x - 3 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 12x^5 + 32x^4 + 43x^3 - 33x^2 + 13x - 2$$

Вариант № 14

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 31x^2 + 31x - 12$$

2. Решить уравнения $x^3 - 12x^2 + 46x - 60 = 0$;

$$x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x + 12 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 6x^5 + 4x^4 + 1\frac{1}{2}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 1$$

Вариант № 15

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 7x + 3$
2. Решить уравнения $x^3 + 9x^2 + 25x + 25 = 0$;
 $x^4 - 2x^3 - x^2 - 10x - 3 = 0$
3. Найти рациональные корни многочлена
 $f(x) = 18x^5 + 57x^4 + 65x^3 - 31x^2 - 8x + 16$

Вариант № 16

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 25x + 12$
2. Решить уравнения $x^3 - 9x^2 + 25x - 25 = 0$;
 $x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 13x - 12 = 0$
3. Найти рациональные корни многочлена
 $f(x) = 18x^5 + 75x^4 + 131x^3 - 129x^2 + 72x - 16$

Вариант № 17

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + x + 12$
2. Решить уравнения $x^3 + 3x^2 + 50 = 0$;
 $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 19x + 12 = 0$
3. Найти рациональные корни многочлена
 $f(x) = 12x^5 + 4x^4 + x^3 + 9x^2 - x - 2$

Вариант № 18

1. Определить количество действительных корней многочлена
 $f(x) = x^5 - 7x^4 + 20x^3 - 30x^2 + 24x - 8$
2. Решить уравнения $x^3 + 9x^2 + 24x + 70 = 0$;
 $x^4 - 4x^3 + x^2 - 14x + 40 = 0$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 6x^6 - 2x^5 - 2\frac{1}{2}x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1$$

Вариант № 19

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 3$$

2. Решить уравнения $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$;

$$x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 10x - 3 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 18x^5 + 27x^4 + 19x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$

Вариант № 20

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x + 1$$

2. Решить уравнения $x^3 - 3x^2 - x - 5 = 0$;

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 10x + 12 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 18x^5 + 9x^4 + x^3 + 13x^2 - 4x - 4$$

Вариант № 21

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 2$$

2. Решить уравнения $x^3 + 6x^2 - 11x + 40 = 0$;

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x - 20 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 6x^5 - 7x^4 + 9\frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 5\frac{1}{3}$$

Вариант № 22

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 19x^2 + 13x - 4$$

2. Решить уравнения $x^3 - 3x^2 - 23x - 35 = 0$;

$$x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 40 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 9x^5 - 7\frac{1}{2}x^4 + 2\frac{1}{2}x^3 - 8\frac{1}{2}x^2 + 8x - 2$$

Вариант № 23

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 12x + 2$$

2. Решить уравнения $x^3 - 9x^2 + 24x - 70 = 0$;

$$x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 60 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 18x^6 + 21x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 15x^2 + 4x + 4$$

Вариант № 24

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 19x^2 + 13x$$

2. Решить уравнения $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0$;

$$x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 10x - 3 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 3x^5 - 2\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 2\frac{5}{6}x^2 + 2\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

Вариант № 25

1. Определить количество действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 12x$$

2. Решить уравнения $x^3 + 3x^2 - 5x + 25 = 0$;

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = 0$$

3. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 6x^6 + 7x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 5\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$$

Ответы

Многочлены над полем \mathbb{C} и полем \mathbb{R}

1.

$$1)(x-2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3}),$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)$$

$$2)(x+2)(x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3}),$$

$$(x-2)(x^2-2x+4)$$

$$3)(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i),$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$4)(x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}+i\sqrt{2}),$$

$$(x^2-2\sqrt{2}+4)(x^2+2\sqrt{2}+4)$$

$$5)(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^*$$

$$(x+\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})(x-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{3})(x+\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}),$$

$$(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$$

$$6)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i)(x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i)^*$$

$$(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i)(x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i),$$

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-x\sqrt{3}+3)(x^2+x\sqrt{3}+3)$$

$$7)(x-\sqrt[4]{3})^2(x-i\sqrt[4]{3})^2(x+\sqrt[4]{3})^2(x+i\sqrt[4]{3})^2,$$

$$(x-\sqrt[4]{3})^2(x+\sqrt[4]{3})^2(x^2+\sqrt{3})^2$$

$$8)(x-3-\sqrt{6})(x-3+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})$$

$$9)\left(x+\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right),$$

$$(x^2+3x+3)\left(x+\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$$

2.

$$1)(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1+i)$$

$$2)(x+1)(x-1)(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon}), \varepsilon \partial \varepsilon \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$3)\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)*$$

$$\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$$

$$4)(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

3.

$$1)(x-\sqrt[3]{2})(x^2-2x\sqrt[3]{2}\cos\frac{2\pi}{9}+\sqrt[3]{4})(x^2-2x\sqrt[3]{2}\cos\frac{4\pi}{9}+\sqrt[3]{4})*$$

$$(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x^2+2x\sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{9}+\sqrt[3]{4})$$

$$2)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{9}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{9}+1)(x^2+2x\cos\frac{\pi}{9}+1)$$

$$3)(x^2-2x\cos\frac{\pi}{10}+1)(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{10}+1)*$$

$$(x^2+2x\cos\frac{\pi}{10}+1)(x^2+2x\cos\frac{3\pi}{10}+1)$$

$$4)(x+1)(x^2-x+2)$$

$$5)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$$

$$6)(x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + \sqrt{2}x + 2)$$

$$7)(x-1)(x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x + 1)(x^2 + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})x + 1)$$

4.

$$1)x^4 - (1+i)x^2 - (1-i)x^2 + (1+i)x - i,$$

$$x^5 - x^4 - x + 1$$

$$2)x^3 - 3(1+2i)x^2 - 3(3+4i)x + (11-2i),$$

$$x^6 - 6x^5 + 27x^4 - 68x^3 + 135x^2 - 150x + 125$$

$$3)x^4 + 6x^3 + (15+2i)x^2 + (18+6i)x + 8 + 6i,$$

$$x^8 + 12x^7 + 66x^6 + 216x^5 + 461x^4 + 660x^3 + 624x^2 + 360x + 100$$

5.

$$1)(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)$$

$$2)(x^2+2x+2)(x-\pi)(x^2+2x+4)$$

$$3)(x^2-4x+13)^3$$

$$4)(x^2+1)^2(x^2+2x+2)$$

6.

$$1)1,73$$

$$2)1,23$$

9.

$$1)-4, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$2) \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}$$

$$3) -\frac{2}{3}, 2 \pm \sqrt{3}$$

$$4) \frac{5}{3}, 1 \pm i\sqrt{5}$$

$$5) -\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}, \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})$$

$$6) -i, -i, 2i$$

$$7) -i, -i, 3 + 2i$$

$$8) i, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$9) -\frac{1}{2}i, \frac{5 \pm i\sqrt{5}}{2}$$

$$10) -2, 1, 1$$

$$11) -1 \pm \sqrt{3}, 2$$

$$12) -1, \frac{-5 \pm 5i\sqrt{3}}{2}$$

$$13) -7, -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$14) -3, \frac{3 \pm 5i\sqrt{3}}{2}$$

$$15) -3, \frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$16) -\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$$

10.

1) 2,09

2) 2,89

11.

Пусть $x_1 = u + v, x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$, где

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, uv = -\frac{p}{3}. \text{ Тогда}$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) = 3(u^2 + v^2 + uv),$$

$$x_3 - x_2 = \sqrt{3}i(v - u),$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 &= -27(u^3 - v^3)^2 = \\ &= -27((u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3) = -27(q^2 + 4\frac{p^3}{27}) = -27q^2 - 4p^3 \end{aligned}$$

12.

1) $-1 \pm \sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}$

2) $\pm \sqrt{6}, 1 \pm i\sqrt{3}$

3) $1 \pm \sqrt{2}, \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$

4) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

5) $-1 \pm i, \pm i\sqrt{2}$

6) $1 \pm i, \pm i\sqrt{6}$

7) $\frac{-1 \pm 2\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$

$$8) \frac{-1 \pm \sqrt{-1 \pm 2\sqrt{29}}}{2}$$

$$9) \pm \sqrt{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$10) \frac{\sqrt{3} \pm i\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2}, \frac{-\sqrt{3} \pm i\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{2}$$

13.

- 1) 3 действительных корня в интервалах $(-3,-2), (-2,-1), (0,1)$
- 2) 1 действительный корень в интервале $(-1,0)$
- 3) 2 действительных корня в интервалах $(0,1), (2,3)$
- 4) 2 действительных корня в интервалах $(-1,0), (0,1)$
- 5) 4 действительных корня в интервалах $(-3,-2), (-2,-1), (0,1), (1,2)$
- 6) нет действительных корней

14.

$$1) f = x^3 - 3x - 1, f_1 = x^2 - 1, f_2 = 2x + 1, f_3 = 1; 3$$

$$2) f = x^4 - 12x^2 - 16x - 4, f_1 = x^3 - 6x - 4, \\ f_2 = 3x^2 + 6x + 2, f_3 = x + 1, f_4 = 1; 4$$

$$3) f = x^3 - x + 5, f_1 = 3x^2 - 1, f_2 = 2x - 15, f_3 = -1; 1$$

$$4) f = x^4 + x^2 - 1, f_1 = 2x^3 + x, f_2 = -x^2 + 2, f_3 = -x, f_4 = -1; 2$$

$$5) f = x^4 + 4x^3 - 12x + 9, f_1 = x^3 + 3x^2 - 3, \\ f_2 = x^2 + 3x - 4, f_3 = -4x + 3, f_4 = 1; 0$$

$$6) f = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2, f_1 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \\ f_2 = -x^2 - x + 3, f_3 = -2x - 1, f_4 = -1; 2$$

15.

$$1) \left(x + \frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$(x^2 + 5x + 7) \left(x - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$2) (x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3}) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$3) 3(x-1+i)(x-1-i) \left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right),$$

$$3(x^2 - 2x + 2) \left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$$

$$4) 5 \left(x + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) \left(x + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) (x+4+\sqrt{17})(x+4-\sqrt{17}),$$

$$(5x^2 + 4x + 1)(x+4+\sqrt{17})(x+4-\sqrt{17})$$

Многочлены над полем \mathbb{Q} и кольцом целых чисел \mathbb{Z}

1.

$$1) x_1 = \frac{1}{2}$$

$$2) x_1 = \frac{6}{5}$$

$$3) x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$4) x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = x_4 = \frac{3}{2}$$

5) *нет*

6) *нет*

$$7) x_1 = x_2 = \frac{6}{5}, x_3 = x_4 = -\frac{1}{3}, x_5 = -1$$

$$8) x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2}{3}$$

$$9) x_1 = 2$$

$$10) x_1 = -3$$

$$11) x_1 = -2, x_2 = 3$$

$$12) x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$13) x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{3}{4}$$

14) *нет*

$$15) x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$$

$$16) x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4}$$

$$17) x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -3$$

3.

$$1) (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

$$2) (x^2 + 2)^2$$

$$3) (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$$

4.

$$1) \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2} i\sqrt{6}$$

$$2) 1 \pm \sqrt{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{14}}{3}$$

$$3) \pm i, -2 \pm \sqrt{3}i$$

5.

$$1) x, x+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, \\ x^4+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$2) x, x+1, x+2, x^2+1, x^2+x+2, x^2+2x+2$$

6.

Многочлен $x^4 + \alpha x^2 + \beta$ приводим в $\mathbb{Q}_{[x]}$ тогда и только тогда, когда уравнение $y^2 + \alpha y + \beta = 0$ имеет рациональные корни а и в либо существуют рациональные числа d и c , для которых $d^2 = \beta, c^2 = 2d - \alpha$. В первом случае $x^4 + \alpha x^2 + \beta = (x^2 - a)(x^2 - b)$, во втором случае

$$x^4 + \alpha x^2 + \beta = (x^2 + cx + d)(x^2 - cx + d)$$

7.

$m \neq 0$, и $\frac{n}{m}$ является кубом рационального числа.

М 294

*Оксана Ивановна
Мартынюк*

**СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО АЛГЕБРЕ
МНОГОЧЛЕНОВ**

Учебно-методическое пособие

М 294

Издательская лицензия ИД № 06024 от 09.10.2001 года.
Подписано в печать 16.04.2010. Формат 60х90/16.
Объём издания в усл. печ. л. 2,0 Тираж 100 экз. Заказ № 57.

Псковский государственный педагогический университет им. С.М. Кирова,
180760, г. Псков, пл. Ленина, 2.

Редакционно-издательский отдел ПГПУ им. С.М. Кирова,
180760, г. Псков, ул. Советская, 21, телефон 72-74-62.

E-mail: rio@psksu.ru