Министерство образования и науки Российской Федерации
Псковский государственный университет

Л. В. Павлова

КОМПЕТЕНТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Псков
Псковский государственный университет
2014

УДК 514.11
ББК 22.151.0
П121

Рекомендовано к изданию кафедрой математического анализа и методики обучения математике физико-математического факультета Псковского государственного университета

Рецензенты:
— Н. Л. Стефанова, доктор педагогических наук, профессор РГПУ им. А. И. Герцена;
— О. И. Мартынюк, кандидат педагогических наук, доцент ПсковГУ

Павлова, Л. В.
П121 Компетентностные задачи по геометрии: учебно-методическое пособие. — Псков : Псковский государственный университет, 2014. — 84 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль «Математика». Может быть использовано при изучении курса по выбору «Компетентностные задачи по геометрии», учителями математики и в рамках курсов повышения квалификации. Учебно-методическое пособие включает теоретический материал, практические занятия и достаточное количество компетентностных задач. Пособие состоит из введения, шести параграфов и списка литературы. В первых пяти параграфах представлен лекционный материал и методические аспекты работы с компетентностными задачами, шестой посвящён тематике практических занятий.

УДК 514.11
ББК 22.151.0

Содержание

Введение

Радикальные перемены в жизни нашего общества потребовали существенной переориентации вузовского образования, как в его целевой направленности, так и оптимизации конкретных форм, средств и методов обучения, поиска новых путей повышения эффективности подготовки специалистов.

Пересмотр требований к подготовке учащихся привёл к тому, что одним из приоритетных направлений обновления российского образования явилось внедрение компетентностного подхода в систему общего образования.

Компетентностно-ориентированное образование направлено на комплексное освоение знаний и способов практической деятельности, обеспечивающих успешное функционирование человека в ключевых сферах жизнедеятельности в интересах как его самого, так и общества, государства.

В. А. Болотов рассматривает компетентностный подход в тесной взаимосвязи с формированием способности эффективно действовать за пределами ситуаций, тем, изучаемых в учебном процессе. Для него при переходе к компетентностно-ориентированному образованию важно ни в коем случае не пренебрегать основами наук, знаниями, умениями и навыками.

Концепция компетентностного подхода в образовании направлена на формирование человека, который сможет адаптироваться к жизненным ситуациям.

Основные результаты общего образования в рамках компетентностного подхода фиксируются через набор ключевых (базовых) образовательных компетенций, которые задают основной ориентир выбора предметного содержания и условий организации «основных видов деятельности учащегося, позволяющих ему овладевать социальным опытом, получать навыки жизни и практической деятельности в современном обществе (Хуторской А. В.)».

Среди разнообразных списков ключевых образовательных компетенций, предлагаемых учёными (А. В. Хуторским, И. Д. Фруминым, И. А. Зимней и др.), в качестве одной из ведущих выделяется учебно-познавательная компетенция, которая определяет характер и содержание учебно-познавательной деятельности учащегося, как основной деятельности, в которую он включён в процессе обучения.

Требования к учащемуся владеть деятельностью, связанной с получением знаний, необходимых для решения определённых задач, владеть приёмами самостоятельной и продуктивной учебно-познавательной деятельности, использовать различные средства и методы познания приводят к необходимости развития его учебно-познавательной компетентности посредством использования специально разработанных задач. Такие задачи мы называем компетентностными.

Говоря о реализации компетентностного подхода в средней школе нельзя забывать, что учителя математики должны быть к этому готовы и знать, как это сделать. Следовательно, профессиональная подготовка будущих учителей математики должна быть направлена на изучение способов и методов реализации компетентностного подхода.

Концепция модернизации российского образования требует подготовки качественно нового учителя, готового к работе в новых условиях, способного адаптироваться к педагогическим новациям современной школы.

Главной задачей современной высшей школы является подготовка специалиста, обладающего профессиональной компетентностью современного уровня. И если речь идёт об учителе-предметнике, то следует в качестве отдельной задачи выделить совершенствование его предметно-методической компетентности, которая формируется при осуществлении предметно-методической подготовки.

Рассматривая профессиональную подготовку будущих учителей математики, необходимо исходить из современного понимания профессиональной компетентности учителя, его профессионального мастерства и уверенного владения предметом. А значит, одной из ключевых компетентностей будущего специалиста должна стать предметно-методическая компетентность.

Профессиональная подготовка будущего учителя математики включает в себя предметную и методическую составляющие. Предметная — обеспечивает эффективное осуществление предметной деятельности, методическая — отвечает за эффективное решение задач, связанных с реализацией процесса обучения математике. Будем рассматривать ***предметно-методическую компетентность***, которая предполагает подготовку по предметному содержанию школьного курса математики, но также включает методические вопросы, связанные с содержанием обучения.

Под предметно-методической компетентностью учителя математики будем понимать профессиональную компетентность, которая выражена в <u>практической готовности</u> к осуществлению видов профессиональной деятельности, связанной с обучением математике в системе общего среднего образования, <u>основанной на системе теоретических знаний.</u>

Рассматривая предметно-методическую компетентность, формируемую у будущего учителя математики, в рамках системы вузовского образования можно говорить о трёх её составляющих:

1) овладение специальными знаниями о целях, содержании, объектах и средствах труда учителя математики (*содержательная компетентность*);

2) овладение специальными умениями на подготовительном, исполнительском, итоговом этапах деятельности (*технологическая компетентность*);

3) овладение специальными свойствами личности и характера, позволяющими осуществлять педагогический процесс и получать искомый результат (*личностная компетентность*).

Предметно-методическая компетентность обеспечивает эффективное осуществление математической деятельности, которая является содержательной основой профессиональной деятельности учителя математики как учителя-предметника.

Таким образом, предметная подготовка будущего учителя математики должна формировать психологическую установку на осмысление математической деятельности, владения способами и приёмами её осуществления как личностно-профессиональной ценности. Такая установка может стать главной мотивацией при изучении курсов высшей математики, в рамках которых, прежде всего, осуществляется предметная подготовка учителя математики в вузе.

Основным способом реализации компетентностного подхода в системе профессиональной подготовки признан путь, состоящий в формулировании и решении типичных профессиональных задач, в которых отражаются современные требования к осуществлению профессиональной деятельности.

Учитывая деятельностную характеристику, предметная компетентность учителя математики должна обусловливаться, во-первых, собственно математической деятельностью, а во-вторых, профессиональной деятельностью учителя.

Методическая компетентность будущего учителя математики должна включать в себя не только умения применять теоретические знания в профессиональной деятельности и знать, как это сделать, но и умение научить школьников применять математические знания при решении, как математических задач, так и задач из других предметных областей и разрешения жизненных трудностей.

Итак, предметно-методическая компетентность современного учителя математики включает в себя сформированность таких предметно-методических умений как: владение совокупностью знаний в области преподаваемого предмета; ориентация в современных исследованиях по предмету; применение теоретических знаний для решения математических задач; организация процесса обучения на уроке; владение методикой преподавания конкретного предмета; мотивирование процесса обучения; использование информационных и других технологий обучения; самостоятельное получение знаний; применение ценностных установок в процессе обучения. Все эти умения необходимы были учителю и в традиционном подходе к обучению. Учитывая современные требования к подготовке учителя математики, к перечисленным выше умениям нужно добавить: умение выбирать или разрабатывать необходимую для конкретного образовательного процесса технологию; умение реализовывать компетентностный подход на уроках математики (формирование компетентностей); умение работать (отбор, решение, конструирование) с компетентностными задачами и такое методическое умение, как объяснение учащимся способов решения компетентностных задач, а также применение таких задач на уроках.

Следовательно, если при подготовке учителя математики использовать специальные задачи, которые будем называть компетентностными и специально разработанную методику работы с ними, то это будет способствовать формированию готовности студентов осуществлять методическую обработку соответствующих задач, что обеспечит совершенствование их предметно-методической компетентности.

Под методической обработкой компетнтностных задач понимают: умение выделять познавательные результаты, полученные при решении задачи; умение устанавливать избыточность (недостаточность), противоречивость данных задачи; умение «считывать» информацию, представленную в разных формах; умение подбирать необходимые для решения знания (как математические, так и нематематические), а также умение преобразовывать традиционные математические задачи в компетентностные (*достраивать задачу до компетентностной)*.

В данном пособии представлены теоретические аспекты, необходимые учителям математики для работы с компетентностными задачами и практические задания, которые направлены на развитие умений решать и методически обрабатывать такие задачи. Также приведены примеры компетентностных задач. Материал пособия представлен как лекционный курс и практические занятия в рамках курса по выбору «Компетентностные задачи по геометрии», разработанного для студентов физико-математического факультета (направление 44.03.01 — «Педагогическое образование», профиль «Математика») Псковского государственного университета.

§ 1. Понятие компетенций и компетентности. Учебно-познавательная компетентность школьника

Трудно представить, каким будет мир в середине XXI века. Поэтому учеников нужно готовить к переменам, развивая у них такие качества, как мобильность, динамизм, конструктивность, самостоятельность и способность учиться на протяжении всей жизни.

Цели школьного образования с точки зрения компетентностного подхода:

1. Научить учиться.
2. Научить объяснять явления действительности, используя научный аппарат, т. е. решать познавательные проблемы.
3. Научить ориентироваться в ключевых проблемах современной жизни, т. е. решать аналитические проблемы.
4. Научить ориентироваться в мире духовных ценностей, т. е. решать аксиологические проблемы.
5. Научить решать проблемы, связанные с реализацией определенных социальных ролей.
6. Научить решать проблемы, общие для различных видов профессиональной и иной деятельности.
7. Научить решать проблемы профессионального выбора, включая подготовку к дальнейшему обучению в учебных заведениях системы профессионального образования.

Системы образования наиболее развитых стран мира перешли к новому этапу, который характеризуется следующими изменениями:

- отношения к «знаниям, умениям, навыкам»; их место начинают занимать ценности мышления, творчества, компетентностей личности;
- традиционных подходов к его содержанию — переход к сообразному с современным уровнем развития общества компетентностному подходу;
- иерархии целей образования: интегративные цели обучения доминируют над предметными;

- образовательных ценностей и смыслов: не «вы должны выучить и воспроизвести…», а «мы поможем вам овладеть и применить…»;
- характера педагогических отношений: авторитаризм уступает место сотрудничеству и партнёрству в познании и деятельности.

Итак, что же такое компетенция и компетентность?

Компетенция (в переводе с латинского «*competentia»)* — означает круг вопросов, в которых человек хорошо осведомлён, обладает познаниями и опытом. Компетентный в определённой области человек обладает соответствующими знаниями и способностями, позволяющими ему обоснованно судить об этой области и эффективно действовать в ней. Компетенция — отчуждённое, наперёд заданное социальное требование (норма) к образовательной подготовке ученика, необходимой для его качественной продуктивной деятельности в определённой сфере (А. В. Хуторской).

Компетенции — это интегративная целостность знаний, умений, навыков, обеспечивающих профессиональную деятельность, это способность человека реализовать на практике свою компетентность (Э. Зеер, Э. Сыманюк).

Из определений видно, что компетенции не противопоставляются знаниям, умениям и навыкам, а тесно с ними связаны. Только если раньше требовалось развивать только знания, умения и навыки при обучении в школе, то сейчас этого не достаточно. Теперь необходимо научить учащихся самостоятельно применять полученные знания и умения в жизни, при изучении других предметов, в какой-либо сфере деятельности и т. д.

Компетентность — совокупность личностных качеств учащегося (ценностно-смысловых ориентаций, знаний, умений, навыков, способностей), обусловленных опытом его деятельности в определённой социально и личностно значимой сфере (А. В. Хуторской).

Компетентность это совокупность (система) знаний в действии (Э. Зеер, Э. Сыманюк).

Итак, компетентность — владение, обладание учеником соответствующей компетенцией, включающее его личностное отношение к ней и предмету деятельности. Компетентность — уже состоявшееся личностное качество (совокупность качеств) ученика и минимальный опыт деятельности в заданной сфере.

Иногда компетенцию и компетентность рассматривают как равнозначные понятия. Однако из определений видно, что компетенции — это требования, которые предъявляют к учащимся, которые можно четко прописать и проверить. А компетентность — это личностное качество, которое показывает умение учащихся применять сформированные компетенции и зависит, как от знаний, так и от особенностей, задатков, характера каждого ученика.

Школьное математическое образование сегодня требует не только достижения целей, связанных с владением учащимися содержанием школьного предмета «математика», что означает умение применять математические знания при решении любых математических задач, но и более общих целей, которые включают указанные умения и предполагают овладение общим умением применять математические знания в ситуациях, с которыми учащиеся могут встретиться в других учебных предметах или повседневной практике, жизни. Эти цели общего образования сконцентрированы в понятии учебно-познавательной компетентности учащихся, которая связана с основным видом деятельности школьников — учебно-познавательной.

Учебно-познавательная деятельность *— это элемент целостного процесса обучения, представляющий собой целенаправленное, систематически организованное, управляемое извне или самостоятельное взаимодействие учащегося с окружающей действительностью, результатом которой является овладение им (на уровне воспроизведения или творчества) системой знаний о мире, познавательных умений и навыков, а также формирование познавательного и эмоционально-ценностного отношения к действительности.*

Хуторской А. В. определяет учебно-познавательную компетентность как «совокупность компетенций ученика в сфере самостоятельной познавательной деятельности, включающей элементы логической, методологической, общеучебной деятельности, соотнесенной с реальными познаваемыми объектами». Сюда он относит знания и умения организации, целеполагания, планирования, анализа, рефлексии, самооценки учебно-познавательной деятельности. По отношению к изучаемым объектам ученик овладевает креативными навыками продуктивной деятельности: добыванием знаний непосредственно из реальности, владением приёмами действий в нестандартных ситуациях, эвристическими методами решения проблем. В рамках данной компетенции определяются требования соответствующей функциональной грамотности: умение отличать факты от «домыслов», владение измерительными навыками, использование вероятностных, статистических и иных методов познания.

Учитывая сказанное, под ***учебно-познавательной компетенцией*** понимается *сложное явление, представляющее собой совокупность знаний, умений, навыков, и способов использования их для осуществления мотивированной самостоятельной учебно-познавательной деятельности*.

Под ***учебно-познавательной компетентностью*** будем понимать *совокупность личностных качеств учащегося, отражающих владение им учебно-познавательной компетенцией (знания, умения, навыки и способы их использования для осуществления самостоятельной учебно-познавательной деятельности)*.

Учебно-познавательная компетенция в процессе овладения ею «личностно окрашивается» качествами ученика и предстаёт в виде учебно-познавательной компетентности, состоящей из трёх компонентов: *когнитивный компонент* (система знаний), *деятельностный компонент* (умения) и *ценностно-мотивационный компонент* (мотивы и ценностные ориентации).

Выделим компоненты учебно-познавательной компетентности, которые можно развивать у школьников при изучении, например, курса стереометрии: мотивация на познание; умения организации собственной учебно-познавательной деятельности; информационные умения; логические умения; система знаний из предметной области (стереометрии). Для курса стереометрии усиливается логическая составляющая, появляется возможность рассмотрения моделей реального мира, используется информация из личного опыта.

В связи с тем, что учебно-познавательная компетентность относится к группе ключевых компетентностей, она не может эффективно формироваться и развиваться только учителем математики в рамках своего учебного предмета. Речь должна идти о скоординированной деятельности всего коллектива педагогов школы. А это означает, что при изучении отдельных предметов между ними должны устанавливаться межпредметные связи и связи с реальной действительностью, с жизнью, т. к. значимым в процессе обучения для старшеклассника становится решение тех задач, которые демонстрируют связи учебного содержания с реальными ситуациями, в которых они могут оказаться. Необходимо учитывать это при отборе содержания в процессе обучения предмету.

В формировании учебно-познавательной компетентности учащихся математика занимает одну из лидирующих позиций. Во-первых, занятие математикой способствует развитию строго логического мышления (одна из самых распространённых и значимых развивающих целей уроков математики). Дедуктивное рассуждение, способность к абстрагированию, обобщению, способность мыслить, анализировать, критиковать — есть компоненты учебно-познавательной компетентности, которые всегда формировались учителями математики.

Во-вторых, математика использует общенаучные методы познания мира и в то же время сама является методом его познания, а значит, изучая математику, учащиеся овладевают ими в той или иной степени. Одним из таких методов является математическое моделирование.

В-третьих, математика через решение теоретических и практических задач учит выделять проблему, находить её решение, реализовывать его, давать оценку, что является важнейшим компонентом учебно-познавательной компетентности. Отметим, что математика учит добиваться поставленной цели, не останавливаясь перед трудностями.

В-четвёртых, математика развивает воображение и интуицию, исследовательские и творческие способности.

И в-пятых, средствами математики можно формировать умение и способность человека учиться на протяжении всей жизни, являются едва ли не самым важным в компетентностном подходе. Это подтверждает способность выпускников различных математических факультетов быстро и эффективно осваивать любые смежные профессии.

Система умений, определяющих учебно-познавательную компетентность ученика, содержит комплекс умений, которые направлены на выделение объекта изучения, планирование и организацию соответствующей деятельности. В этом комплексе, в свою очередь, выделяются умения, связанные с «видением» в новом уже известного, «видением» возможностей, особенностей применения известных способов в деятельности с вновь изучаемыми объектами, выявлением направлений реализации этих возможностей и их оценкой.

Обучение математике в большей степени, чем обучение любому другому предмету, должно быть направлено на формирование указанных умений. Дело в том, что учебный предмет «математика» предлагает не столько определенную сумму знаний (определений понятий, фактов, свойств, признаков понятий, способов решения некоторых типовых задач), сколько метод изучения объектов, метод установления взаимосвязей между знаниями, характеризующими рассматриваемые объекты. Процесс усвоения этого метода есть, по сути, процесс формирования выделенных умений. Вопрос в том, как организовать этот процесс?

Организация работы по формированию умений, связанных с «видением» в новом уже известного, поиском возможностей, применения известных способов деятельности в новых ситуациях, предполагает соблюдение ряда условий. Основными являются следующие:

1. Процесс освоения учащимися материала должен быть организован как процесс решения познавательных задач, как процесс эвристического поиска. Обязательными компонентами этого процесса должны стать исследования предложенной ситуации, выдвижение гипотез, разработка стратегий их подтверждения (опровержения), выбор приоритетных стратегий и их реализация, проверка, оценка обоснованности полученных выводов, характеристика способа решения познавательной задачи.

2. В процессе формирования таких умений должна проводиться целенаправленная и постоянная работа по системати-

зации знаний учащихся (не только фактологических, но и методологических).

При изучении математики это возможно при решении задач, которые мы будем называть компетентностными. Более подробно понятие «компетентностная задача» будет рассмотрено в следующем параграфе.

Следует, конечно же, отличать предметную компетентность учителя и предметную компетентность ученика.

Предметная компетентность учителя математики — это составляющая его профессиональной компетентности, которая обеспечивает эффективное осуществление предметной (математической) деятельности, которая является содержательной основой профессиональной деятельности учителя математики как учителя-предметника.

Предметные компетенции — это специфические способности, необходимые для эффективного выполнения конкретного действия в конкретной предметной области и включающие узкоспециальные знания, особого рода предметные умения, навыки, способы мышления.

Математическая (предметная) компетентность учащегося — это способность структурировать данные (ситуацию), вычленять математические отношения, создавать математическую модель ситуации, анализировать и преобразовывать её, интерпретировать полученные результаты. Иными словами, математическая компетентность учащегося способствует адекватному применению математики для решения возникающих в повседневной жизни проблем.

Уже было сказано, что совокупность компетенций, наличие знаний и опыта, необходимых для эффективной деятельности в заданной предметной области, называют компетентностью. Компетентность проявляется в случае применения знаний и умений при решении задач, отличных от тех, в которых эти знания усваивались. Компетентность индивида в области определённой компетенции определяется уровнем его достижений в этой области. Иными словами, *математическая компетентность учащегося* способствует адекватному применению математики для решения возникающих в повседневной жизни проблем.

Выделим составляющие предметной компетентности учащегося на примере курса стереометрии:

1) пространственное моделирование (умение выполнять правильно чертежи пространственных фигур на плоскости, конструировать модели тел);

2) метрические соотношения (знание формул, нахождение величины, её оценка, сравнение мер величин);

3) перевод текста с естественного (словесного) языка на формально-символьный и обратно (например, при решении компетентностных задач);

4) отбор и применение необходимых стереометрических знаний и умений для разрешения ситуаций.

Компетентность ученика в области математики позволит ему более обобщённо и творчески подходить к любой математической задаче. Компетентностные задания предполагают применение знакомых умений в незнакомой для учеников ситуации.

При компетентностном подходе к обучению математике акцент переносится на логику решения задачи, на анализ и выделение теоретических областей знаний, на прогнозирование процесса решения (предварительного, схематичного его представления в уме) на основе известных методов, приёмов и способов решения той или иной задачи.

Урок математики отличается от других уроков тем, что при изучении любой темы решается большое количество математических задач. Поэтому развивать компетентности приходится в большей степени с помощью задач. А одной из основных компетентностей, которая активно развивается на уроках математики, является учебно-познавательная, т. к. она связана с учебно-познавательной деятельностью — основным видом деятельности школьников.

В данном пособии приведены примеры компетентностных задач, используемых при изучении раздела геометрии «стереометрия», т. к. в результате анализа литературы (учебников, сборников задач, журналов и т. д.) выяснилось, что таких задач недостаточно, что усложняет работу учителя математики.

Вопросы для самопроверки:

1. Чем отличаются понятия «компетенция» и «компетентность»?
2. Что такое учебно-познавательная компетентность учащегося?
3. Почему математика занимает одну из лидирующих позиций в формировании учебно-познавательной компетентности учащихся? Как Вы считаете, так ли это на самом деле?
4. Что такое предметная (математическая) компетентность школьника? Чем она отличается от предметной компетентности учителя?

§ 2. Понятие компетентностной задачи

Существуют различные названия и определения задач, которые направлены на формирование и проверку компетентностей учащихся. Их называют компетентностно-ориентированными, ситуационными, контекстные и т. д. Мы будем называть такие задачи компетентностными.

Под компетентностными задачами, рассматриваемыми при изучении математики, будем понимать задачи, целью решения которых является разрешение стандартной или нестандартной ситуации (предметной, межпредметной или практической по описанному в ней содержанию) посредством нахождения соответствующего способа решения с обязательным использованием математических знаний. Основной особенностью таких задач является получение познавательного результата для школьника и профессионально значимого результата для студента — будущего учителя математики.

Важными **отличительными особенностями** компетентностных задач от стандартных математических (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

1) значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию учащегося;

2) условие задачи сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания (из разных разделов основного предмета — математики, из другого предмета или из жизни) на которые нет явного указания в тексте задачи;

3) информация и данные в задаче могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т. д.), что потребует распознавания объектов;

4) указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задачи.

Кроме выделенных четырёх обязательных особенностей, компетентностные задачи могут удовлетворять и следующим:

5) по структуре эти задачи — нестандартные, т. е. в структуре задачи обязательно неопределены некоторые из её компонентов;

6) наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задачи, что приводит к объёмной формулировке условия;

7) наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причём данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

Компетентностные задачи можно дифференцировать по уровням сложности:

1. **Задачи первого уровня сложности** — это задачи, для решения которых применяется одна стандартная математическая идея в математической, межпредметной или конкретной жизненной ситуации.

Приведем пример: *После 7 стирок кусок хозяйственного мыла уменьшился вдвое по длине, ширине и высоте. На сколько стирок его ещё хватит?*

Решение: Будем считать, что кусок хозяйственного мыла представляет собой прямоугольный параллелепипед с длиной, шириной и высотой соответственно a, b, c. Тогда его объём $V = a \cdot b \cdot c$. После 7 стирок размеры параллелепипеда уменьшились вдвое, т. е. стали $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$. А значит, объём оставшегося куска стал равным $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{8}$. Т. е. получается, что после 7 стирок осталась $\frac{1}{8}$ часть мыла, а $\frac{7}{8}$ израсходовали за 7 стирок. Следовательно, на одну стирку тратили $\frac{1}{8}$ часть мыла.

Ответ: мыла осталось на одну стирку.

Для решения данной задачи требуется только знание формулы объёма прямоугольного параллелепипеда.

2. **Задачи второго уровня сложности** — задачи, для решения которых требуется применение комбинаций нескольких математических идей.

Пример: *На строящийся дом размером 8×10 метров, строители устанавливают равноскатную крышу. Уже поста-*

вили опорные балки, высотой 3 метра, перпендикулярно полу чердака. Сколько упаковок черепицы нужно купить для покрытия крыши, если известно, что одна упаковка рассчитана на покрытие площади в 2,7 м^2*?*

<u>Решение:</u> Сделаем рисунок (рис. 1), тогда будет проще перевести условие задачи на математический язык.

Дано: $AB = 8м; BC = 10м; EF = 3м; AF = FB; EF \perp (ABCD)$.

Найти: $S = S_{AFMD} + S_{BFMC}$.

Решение: $AF = FB \Rightarrow \Delta AFB$ — равнобедренный, а т. к. $EF \perp (ABCD)$, то $EF \perp AB$, а в равнобедренном треугольнике высота является медианой и биссектрисой, следовательно $AE = \frac{1}{2}AB = 4(м)$;

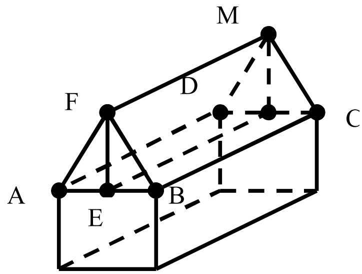


Рис. 1

ΔAFE — прямоугольный и по теореме Пифагора $AF = FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5(м)$.

По теореме о трёх перпендикулярах:
EF перпендикуляр к плоскости $(ABCD)$, где
AF — наклонная,
AE — проекция наклонной,
AD — прямая, проходящая через основание наклонной.

Можно доказать, что $AFMD = BFMC$ — прямоугольники.

$$\Rightarrow S_{AFMD} = S_{BFMC} = AF \cdot AD = 50\ (м^2);\ S = 2S_{AFMD} = 100(м^2) \Rightarrow$$

$100 : 2{,}7 \approx 37{,}03$.

Нужно ответ округлить с избытком, иначе черепицы не хватит.

<u>Ответ:</u> для покрытия этой крыши необходимо купить 38 упаковок черепицы.

3. **Третий уровень сложности** — это задачи, при решении которых математическая идея реализуется через нестандартные методы решения.

Пример: *Имеется несколько одинаковых кирпичей. Необходимо найти способ измерения диагонали кирпича с помощью линейки.* (Решение показано на рисунке 2: нужно сложить три кирпича таким образом, что бы с помощью линейки можно было измерить искомую длину. Учащиеся могут предложить свои способы решения данной проблемы).

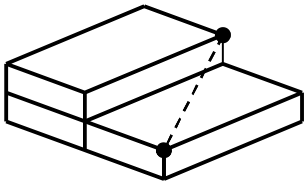


Рис. 2

4. И, наконец, **четвёртый уровень сложности** — это творческие компетентностные задачи, для решения которых построение математической модели требует исследовательского подхода.

Пример: *В геометрии справедлива следующая теорема: при данном объёме из всех пирамид, у которых рёбра равны, правильный тетраэдр имеет наименьшую площадь поверхности.*

А) Вы разработчик новой тары фирмы N. Убедите изготовителей молочных продуктов, что им выгодны пакеты для молока в форме тетраэдра.

Б) Вы разработчик новый тары, но конкурент фирмы N. Убедите изготовителей молочных продуктов, что им невыгодны пакеты для молока в форме тетраэдра.

В) Пакет молока имеет форму правильного тетраэдра с ребром 15 см. Нарисуйте развёртку этого пакета на плоскость в масштабе 1:5 см.

Г) Определите расход бумаги (в м^2) для изготовления 100 пакетов, описанных в пункте В.

Чтобы решить компетентностную задачу, необходимо описанную в условии проблему «перевести» на математический язык, т. е. интерпретировать её как задачу, которую уже возможно решить средствами математики и разработать соответствующую ей математическую модель. Затем решить её, используя математические рассуждения и обобщения, и интерпретировать решение с учётом особенностей рассматриваемой ситуации. При этом понятно, что в ходе решения компетентностной задачи учащиеся будут решать и сугубо математическую задачу или задачи.

Выделяют следующие типы компетентностных задач:

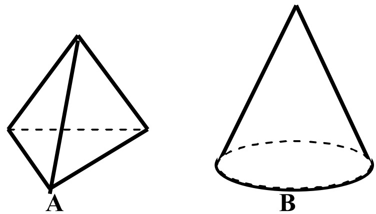
1. Предметные компетентностные задачи: в условии описана предметная ситуация, для решения которой требуется установление и использование широкого спектра связей математического содержания, изучаемого в разных разделах математики; в ходе анализа условия необходимо «считать» информацию, представленную в разных формах; сконструировать способ решения (путем объединения уже известных способов). Полученный результат обеспечивает познавательную значимость решения и может быть использован при решении других задач (заданий).

Таблица 1

Обычная задача	Компетентностная задача
Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра	Цилиндр пересечён двумя плоскостями α и β. Плоскость α проходит через ось цилиндра, а β — параллельна основаниям цилиндра. 1) Постройте сечения цилиндра. 2) Если площадь осевого сечения равна 144 см^2, найдите: а) площадь основания цилиндра, если сечение — квадрат; б) площадь основания цилиндра, если сечение — прямоугольник, у которого одна сторона в 2 раза больше другой. 3) Найдите площадь сечения, полученного плоскостью β в каждом случае из п. 2). 4) Вычислите высоту цилиндра. 5) Придумайте задание с осевым сечением пирамиды

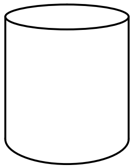
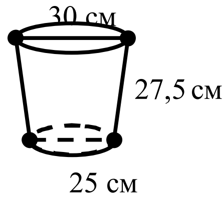
2. Межпредметные компетентностные задачи: в условии описана ситуация на языке одной из предметных областей с явным или неявным использованием языка другой предметной области. Для решения нужно применять знания из соответствующих областей, требуется исследование условия с точки зрения выделенных предметных областей, а также поиск недостающих данных, причём решение и ответ могут зависеть от исходных данных выбранных (найденных) учащимся.

Таблица 2

Обычная задача	Компетентностная задача
Имеются две фигурки, одна из которых представляет собой правильную пирамиду с ребром 20 см, другая — конус с образующей 15 см и диаметром основания 10 см. Определите, из какого материала сделана каждая из этих фигурок, если известны их массы: пирамиды — 7 кг, конуса — 3,2 кг	Имеются две фигурки А и В (рис. 3).  **Рис. 3** Какими могут быть размеры этих моделей, если известно, что фигурка А сделана из цельного куска стекла, а фигурка В из цельного куска меди и их массы $m_A = 180$ г, $m_B = 250$ г ? Определите из каких материалов должны быть сделаны эти фигурки, чтобы их объёмы были равны по 45 см^3, а масса А — 868,5 г, масса В — 112,5 г

3. Практические компетентностные задачи**:** в условии описана практическая ситуация, для разрешения которой, нужно применять не только знания из разных предметных областей (обязательно включающих математику), но и приобретённые из повседневного опыта учащихся. Данные в задаче, не должны быть оторваны от реальности (должны соответствовать действительности, например цены, размеры дома и т. д.). Полученный результат должен быть значим для учащихся, т. е. указана его область применения.

Таблица 3

Обычная задача	Компетентностная задача
Необходимо вычислить размеры бочки для воды, имеющей форму цилиндра, не используя измерительные инструменты, если известно, что бочка будет полной, когда в неё вливают 24 ведра воды. Размеры ведра известны: диаметры оснований 25 см и 30 см, образующая — 27,5 см	На садовом участке имеется бочка для воды (рис. 4).  **Рис. 4**  **Рис. 5** Какими должны быть размеры бочки, чтобы воды хватало на две недели полива участка, если считать, что участок поливают каждый день и тратят при этом 15 вёдер (рис. 5) воды? Какими должны быть наиболее удобные для использования размеры бочки? Какую площадь будет занимать дно бочки? Возможно, ли найти такую бочку в продаже?

Часто компетентностные задачи понимают только как задачи прикладного или межпредметного характера, в которых для разрешения некой практической ситуации нужно использовать знания того или иного (или нескольких одновременно) предмета. Однако, важным является применение и предметных компетентностных задач, где учащиеся учатся отбирать необходимые для решения знания из разных разделов в рамках одной предметной области (математика), причём на применение этих знаний не должно быть явного указания в тексте задачи. Можно заметить, что предметные задачи, способ решения которых неизвестен для учащихся, являются для них компетентностными.

Вопросы для самопроверки:

1. Какая математическая задача называется компетентностной?
2. Перечислите отличительные особенности компетентностных задач.
3. Какие типы компетентностных задач можно выделить?
4. Как можно дифференцировать компетентностные задачи по уровням сложности? Согласны ли Вы с таким делением? Почему?
5. Приведите примеры компетентностных задач.

§ 3. Пример системы компетентностных задач

Для формирования у учащихся тех или иных компетенций на уроке математики, необходимо иметь достаточное количество компетентностных задач, которые будут этому способствовать. Причём эти задачи должны быть разного уровня сложности, что бы учитель мог учитывать возможности каждого ученика. Поэтому учителю необходимо создать систему таких задач.

Под системой понимается множество взаимосвязанных объектов, организованных некоторым образом в единое целое.

Выделим характеристики системы задач, к которым относятся:

1) *общность* — задачи подчинены общей идее (методу решения, кругу используемых понятий и т. д.) или определённому разделу курса (в приведённом ниже примере системы задач, все задачи решаются с использованием знаний стереометрии);

2) *уровневость* — строго детерминированное расположение уровней связи между задачами (уровни сложности);

3) *связность элементов в системе* — возможность графически представить совокупность задач с помощью схемы;

4) *открытость* — можно заменить задачи или дополнить систему задачами так, чтобы не нарушалась целостность системы (задачи должны быть по той же тематике, соответствовать конкретному уровню сложности и типу);

5) *целевая достаточность* — система включает достаточное количество задач для тренинга на занятиях и для самостоятельного решения, задач для контроля знаний (мы также дополняем систему задачами, которые могут быть использованы для замены предложенных в системе задач).

Компетентностные задачи мы подразделяем на три типа: предметные, межпредметные и практические (каждый из типов подробно описан выше) и на четыре уровня сложности. На схеме 1 показана структура системы компетентностных задач.

Схема 1

Компетентностные задачи

Предметные | Межпредметные | Практические

<u>1 уровень</u>

Для решения требуется одна математическая идея (теоретический факт) для разрешения ситуации в рамках изучаемого предмета, в межпредметной или практической ситуации

<u>2 уровень</u>

Для решения требуется комбинация нескольких математических идей при разрешении ситуации (предметной, межпредметной или практической), применяются знания из разных разделов математики (алгебры, математического анализа, геометрии), более сложные межпредметные связи, личные наблюдения

<u>3 уровень</u>

Для решения требуются нестандартные способы решения, «переформулировка» условия задачи, поиск нескольких способов решения одной задачи

<u>4 уровень</u>

Для решения требуется исследовательский подход при построении математической модели ситуации (предметной, межпредметной, практической), изучении нового материала, более детальное знакомство с особенностями другого предмета или сферы деятельности

Рассмотрим пример системы задач, которые можно отнести к компетентностным.

Предметные:

1 уровень: № 1. *На рисунке 6 изображён многогранник. Известно, что площади боковых граней, образующих прямой угол, равны* S_1 *и* S_2*. Можно ли вписать данный многогранник в цилиндр? Если можно, то выразите площадь боковой поверхности цилиндра через* S_1 *и* S_2*. Сформулируйте аналогичные задачи, используя данные, приведённые в каждой строке таблицы 4, и решите их. Охарактеризуйте результат каждой из построенных задач. Как Вы думаете, если в основании многогранника будет лежать произвольный треугольник, можно ли его вписать в цилиндр? Ответ обоснуйте.*

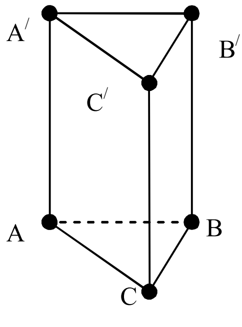


Рис. 6

Таблица 4

№	BC	AC	AB	S_1	S_2	Дополнительные данные
1.	3	–	4	40	30	$AA' = BB' = CC'$ $AA' \perp (ABC)$
2.	3	7	9	90	30	$A'B' \parallel AB$; $C'B' = CB$
3.	5	9	–	–	–	$AA' = BB' = CC'$

Примечание к задаче № 1. При решении задачи потребуется: применить знания планиметрии (вокруг любого треугольника можно описать окружность); доказать, что гипотенуза треугольника будет являться диаметром описанной окружности (и, соответственно, диаметром основания цилиндра). Математической моделью будет являться система из трёх уравнений с тремя неизвестными, решая которую нужно вывести зависимость площади боковой поверхности цилиндра от площади боковых граней призмы, вписанной в цилиндр. Также требуется исследовать и обосновать, что любую треугольную призму можно вписать в цилиндр.

Данная задача соответствует следующим отличительным особенностям, характеризующим компетентностные задачи:

- познавательная и профессиональная значимость получаемого результата (выводится формула нахождения площади боковой поверхности цилиндра через параметры многогранника, который вписан в этот цилиндр — формируется умение выводить формулы в общем виде и работать с ними; доказывается, что любую прямую треугольную призму можно вписать в прямой круговой цилиндр — это может быть использовано при решении других задач);
- условие задачи сформулировано как математическая ситуация, для разрешения которой используются знания, на которые нет явного указания в тексте задачи (например, из планиметрии);
- данные в задаче представлены в различной форме (текст, рисунок, таблица).

Кроме того:

- задача нестандартная (требуется дополнительное исследование условия, самостоятельный отбор знаний, которые нужны для решения задачи, а также неизвестен способ решения задачи);
- наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задачи, что приводит к объёмной формулировке условия (в таблице приведены три различных случая, в которых предложены ситуации с избыточными, недостающими и противоречивыми данными);

Следовательно, в процессе работы с такой задачей развиваются следующие умения (являющиеся составной частью предметно-методической компетентности):

– предметные: выбор необходимых для решения знаний из разных разделов математики (планиметрия, стереометрия, алгебра), узнавание геометрического объекта и обоснование этого, путём применения определения и свойств многогранника), построение математической модели и работа с ней;

– межпредметные: вывод формул в общем виде и работа с ними, работа с текстом, таблицей, работа с информацией (анализ, поиск и др.);

– методические: поиск решения задачи, постановка вопросов к различным этапам решения, умение отличать компетентностные задачи от стандартных математических.

2 уровень: № 2. *В основании пирамиды SABC лежит треугольник с прямым углом при вершине C. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и SC = AC = BC/2 = a. На ребре SA взята точка M — середина этого ребра. Можно ли построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C, перпендикулярно прямой BM? Если можно, то, каким образом? Определите площадь полученного в этом случае сечения.*

Примечание к задаче № 2. Для решения данной задачи используются свойства прямоугольного треугольника, равенство треугольников, теорема Пифагора, отношение длин отрезков. Чтобы ответить на вопрос задачи о возможности построения сечения по заданным условиям, можно попытаться построить сечение поэтапно-вычислительным способом, как будто его можно построить. Т. к. сечением будет являться треугольник, то, чтобы найти площадь сечения, вычисляем площадь треугольника, предварительно отыскав необходимые для этого элементы.

3 уровень: № 3. *На ребре CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P — середина этого ребра. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 перпендикулярно прямой A_1P, и найти площадь полученного сечения, если ребро куба равно 1 (5).*

Примечание к задаче №3. Данную задачу можно решить векторно-координатным способом (целью решения задачи и является изучение данного способа). Для этого вводится система координат (B, x, y, z), определяются координаты вершин куба и точки P. Вводится нормальный вектор ($\overrightarrow{A_1P}$) секущей плоскости и составляется уравнение секущей плоскости. Далее находятся точки пересечения секущей плоскости с осями координат (подставляем координаты точек в уравнение секущей плоскости) и строится искомое сечение. Далее находится площадь сечения вычислительным способом.

4 уровень: № 4. *В основании пирамиды лежит правильный треугольник, стороны которого равны а. Два боковых ребра пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные* α*, а грань, заключённая между ними, наклонена к основанию под углом* β*. Можно ли с помощью имеющихся данных найти объём пирамиды? Найдите объём пирамиды.*

Примечание к задаче № 4. Данная задача является предметной задачей на вычисление с параметрами (буквенными данными). Поэтому в первую очередь надо установить возможные области изменения параметров. Очевидно, что a — длина стороны основания пирамиды — может быть любым положительным числом, т. е. $a > 0$. Угол α, как угол наклона боковых рёбер к основанию, т. е. углы между этими ребрами и их проекциями на основание, могут быть лишь острыми: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Что касается угла β — двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания, то этот угол может меняться в пределах $0^\circ < \beta < 180^\circ$.

При этих условиях, которые мы уточним в процессе дальнейшего решения, можно перейти к поиску решения. Но предварительно нужно построить схематическую запись задачи, и, в частности, чертёж заданной пирамиды, иначе трудно будет искать, и реализовывать план решения.

Построим заданную в задаче пирамиду. Но очевидно, что чертёж этой пирамиды существенно зависит от того, как наклонена указанная боковая грань к плоскости основания, т. е. каково значение параметра β. Возможны три случая:

1) $0^0 < \beta < 90^\circ$; 2) $\beta = 90^\circ$; 3) $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

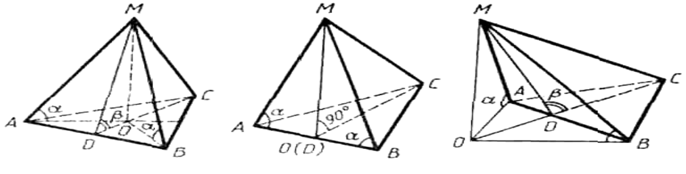


Рис. 7

Этим трём случаям соответствуют три различных вида пирамиды, изображённые соответственно на рисунке 7.

Для того чтобы построить углы наклона рёбер AM и BM к плоскости основания, опускаем из вершины M перпендикуляр MO на плоскость основания. Тогда, очевидно, AO и BO будут проекциями рёбер AM и BM, и, следовательно, $\angle MAO$ и $\angle MBO$ будут искомыми углами. Для того чтобы построить линейный угол двугранного угла, образованного гранью AMB с плоскостью основания, проводим OD перпендикулярно AB (заметим, что при $\beta = 90^0$ точки O и D совпадают). Тогда по известной теореме о трёх перпендикулярах $DM \perp AB$. Так как $\Delta OAM = \Delta OBM$, то $AM = BM$. Отсюда следует, что высота MD проходит через середину AB. Учитывая, что ΔABC правильный, получаем, что продолжение OD должно проходить через вершину C. Тогда $\angle COM$ и есть линейный угол указанного двугранного угла.

Дано: $AB = BC = CA = a$; $\angle OAM = \angle OBM = \alpha$; $MO \perp (ABC)$; $OD \perp AB$; $\angle CDM = \beta$. Найти: V пирамиды.

Далее используя формулу объёма пирамиды, рассматривая все три случая, находим общую формулу для объёма.

В данном случае проверка решения сводится к тому, чтобы убедиться, что по найденным формулам действительно можно вычислить *такой объём, который* принадлежит области определения $V(x)$. Очевидно, что должно соблюдаться лишь одно условие: $V > 0$. Рассматривая полученные формулы для объёма во всех трёх случаях, и учитывая указанные при этом условия задачи, убеждаемся в выполнении указанного условия. Просматривая внимательно решение, замечаем, во-первых, что при решении подобных задач важно предварительно при анализе задачи установить области изменения параметров и в процессе решения уточнить эти области, если требуется. Следовательно, при решении подобных задач надо анализировать каждый шаг решения с точки зрения его выполнимости при предварительно найденных или заданных условиях и при необходимости эти условия уточнять, тем самым, сужая области изменения параметров.

Межпредметные:

1 уровень: № 5. *Из куска олова (рис. 8) требуется отлить «грузики» по 10 и 20 граммов. Укажите размеры форм, которые нужно изготовить, чтобы отливать «грузики» в форме цилиндров (или в форме параллелепипедов).*

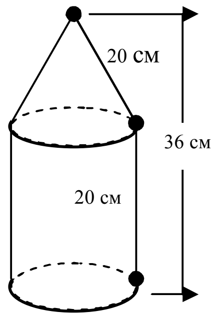


Рис. 8

Примечание к задаче № 5. При решении используется математическая идея — объём цилиндра (или параллелепипеда). Нужно найти объём имеющегося куска олова по указанным размерам, рассчитать чему будут равны объёмы «грузиков» (для этого нужно использовать знания физики: объём находим, зная плотность материала (по таблице) и массу тела), определить какими могут быть размеры форм для «грузиков».

2 уровень: № 6. *Для проведения эксперимента необходимо, чтобы площадь освещённой поверхности шара была в 2 раза меньше теневой. На каком расстоянии от поверхности шара (или от центра шара) радиуса R нужно расположить источник света? Во сколько раз расстояние от источника света до центра шара больше, чем радиус шара? Из какого материала сделан шар, если его радиус 5 см, а масса 250 граммов?*

Примечание к задаче № 6. При решении используется комбинация знаний: формулы площади боковой поверхности шара, площади части поверхности шара, теорема Пифагора. Также для решения составляется уравнение с одной неизвестной, используются знания физики для определения материала, из которого изготовлен шар.

3 уровень: № 7. *Необходимо изготовить металлическую деталь, которая представляет собой полое тело, получаемое при вращении ромба вокруг одной из его диагоналей. Это тело в процессе использования будет нагреваться при заполнении тёплым воздухом. Вокруг какой диагонали нужно вращать ромб, чтобы в процессе эксплуатации деталь остывала быстрее?*

Примечание к задаче № 7: При решении задачи потребуется найти математический способ определения объёма тела вращения. Для этого потребуется построить рисунок, использовать формулы для нахождения объёмов тел, полученных при вращении вокруг оси трапеции и треугольника и путём вычислений найти необходимый объём. Причём нужно будет найти объёмы двух тел — при вращении ромба вокруг большей, а затем и меньшей диагоналей. Применяются знания теоремы Пифагора и знания из физики: быстрее будет остывать тело, площадь поверхности которого больше.

4 уровень: № 8. *В середине XI века в России появились каменные оборонительные укрепления. К их числу относились также оборонительные ограды монастырей, которые использовались в ходе военных действий. Иногда в таких укреплениях устраивались тайные выходы, называвшиеся «вылазами». Представьте, что в одной из башен (рис. 9, башня слева) когда-то был глубокий колодец шириной 4 фута (указано в документах), на дне которого был выход за стены укрепления. Сейчас для защиты от разрушения башни было решено засыпать колодец сухим песком. Спускаться в колодец опасно в связи с возможным обрушением «стен».*

Рис. 9

За песком будет ездить машина, которая за один раз может привезти 7,5 тонн песка. Сколько таких машин песка потребуется заказать, чтобы полностью засыпать колодец?

Примечание к задаче № 8: Для ответа на вопрос задачи потребуется найти объём колодца, который нужно засыпать песком и объём песка, который может привезти машина за один раз (нужно знать удельный вес сухого песка). Чтобы найти объём колодца, необходимо вспомнить, что колодцы обычно имеют форму, близкую к прямому круговому цилиндру. Далее для нахождения объёма необходимо знать радиус (из условия) и высоту цилиндра (глубину колодца). Глубину колодца можно найти с помощью знаний из физики: бросим в шахту камень без начальной скорости и замерим, через какое время (t секунд) будет слышен звук от удара камня о дно колодца после момента начала его падения. Скорость звука будем считать равной $330\frac{м}{сек}$. Пусть t_1 — время падения камня, t_2 — время распространения звука, h — глубина шахты. Камень падает в шахту равноускоренно, значит, справедлива формула: $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где S — путь, v — скорость, a — ускорение, t— время. Начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение равно ускорению свободного падения ($a = g = 9{,}8\frac{м}{c^2}$) $\Rightarrow$ $h = 4{,}9t_1^2$. Звук распространяется равномерно, справедлива формула: $S = vt \Rightarrow h = 330t_2$. Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} t_1 + t_2 = t \\ 4{,}9t_1^2 = 330t_2 \end{cases}$, решая которую находим t_1 и t_2, и, следовательно h.

Учащиеся могут предложить свои способы измерения глубины шахты, которые могут быть не связаны с применением знаний из курса физики. Это могут быть практические способы измерения, тогда задача превратиться в практическую.

Практические:

1 уровень: № 9. *Подарок было решено упаковать в коробку, которая имеет форму куба с ребром 1 дм. Требуется оформить коробку, для этого имеется кусок красной бумаги в форме квадрата со стороной 3 дм и три квадратных листа* *зелёной бумаги площадью 2 дм^2 каждый. Можно ли упаковать коробку в бумагу одного цвета, при этом разрезать бумагу нельзя?*

Примечание к задаче № 9. Для решения задачи используется формула нахождения площади боковой поверхности куба. Школьникам можно предложить попробовать это сделать своими руками на уроке, заранее приготовив такую коробку и бумагу.

2 уровень: № 10. *Из металлической заготовки, имеющей форму круга радиуса R ($R = \sqrt{3}$), вырезают сектор и сворачивают так, чтобы получилась ёмкость (коническая «воронка»). Каким должен быть выбран центральный угол, чтобы объём ёмкости был наибольшим. Также нужно обозначить на «воронке», какую часть в ней будет составлять от общего объёма налитая жидкость, если её уровень вдвое меньше уровня жидкости, заполняющей весь объём. Ответ запишите в виде десятичной дроби.*

Примечание к задаче № 10. Для решения задачи требуется использовать формулу объёма конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, ввести функциональную зависимость $V(\alpha)$ от центрального угла сектора, из которого сделана ёмкость (конус):

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3\left(\alpha^2\sqrt{360^2 - \alpha^2}\right).$$

Этот угол и будет являться неизвестной и $0^\circ \langle \alpha \langle 360^\circ$. Далее исследовать функцию (найти производную и приравнять её к нулю) и найти угол, при которой объём будет наибольшим. Чтобы поставить на «воронке» необходимое деление, нужно найти отношение объёма жидкости в конусе, когда её уровень вдвое меньше уровня жидкости, заполняющей весь объём конуса к объёму всего конуса. Для этого потребуется найти высоту конуса.

3 уровень: № 11. *Из древесины чёрного дерева, относящегося к редким тропическим деревьям семейства эбеновых, сделаны заготовки (рис. 10) для вырезания фигурок. Древесина чёрного дерева необычна не только по окраске, но и по внешне-*

му виду: на срезе незаметны узкие сердцевинные лучи и годичные приросты. Такая древесина прекрасно полируется и становится идеально ровной. Интересно, что отполированное чёрное дерево на ощупь холодное и скорее напоминает металл. Теплоотдача его так велика, что при сжигании в огне оплавляется даже металлическая посуда. А ещё древесина этого дерева обладает необычайной твёрдостью (в два раза больше, чем у дуба) и высокой плотностью (до 1200 кг/м^3*), вот почему, попадая в воду, она немедленно тонет. Эти заготовки необходимо переправить морским путём в другую страну. Для этого из тонких листов нержавеющей стали делают контейнеры, в которые помещают по две заготовки так, чтобы они не двигались внутри контейнера. Придумайте не менее двух видов контейнеров и опишите способы их изготовления. Предложите чертёж и размеры заготовки для изготовления каждого из них. Определите, какой из предложенных видов контейнеров будет более выгоден (экономичен). Какие контейнеры удобнее для транспортировки?*

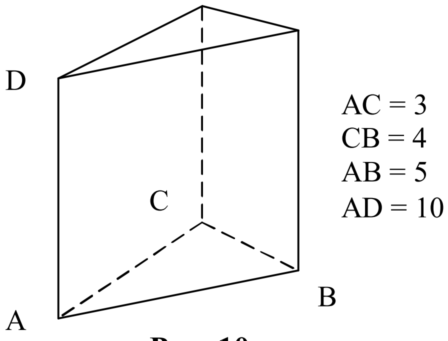


Рис. 10

Примечание к задаче № 11. Проанализировав имеющуюся информацию, нужно доказать, что заготовка имеет форму призмы, в основании которой прямоугольный треугольник. Могут быть предложены следующие виды контейнеров: в виде цилиндра (составленные две заготовки будут образовывать параллелепипед, который будет вписан в цилиндр) и в виде параллелепипеда. Для определения наиболее экономичного контейнера нужно посчитать расход материала на один такой контейнер, т. е. площадь боковой поверхности контейнера.

4 уровень: № 12. *Для строительства садового домика необходимо заложить фундамент. Известно, что домик будет составлен из двух прямых призм с квадратным (помещения) и* *треугольным (крыша) основаниями, причём, треугольное основание представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник. Какой должна быть ширина домика (т. е. сторона квадрата), чтобы его объём был наибольшим, если известно, что периметр основания домика должен быть равен 24 м, а площадь участка на котором будет стоять домик, равна 32 м^2? Также нужно рассчитать, сколько потребуется бетона или специальных плит для закладки фундамента.*

Примечание к задаче № 12: Для решения необходимо найти объём домика, используя имеющиеся в задаче данные. Для этого будут использованы: теорема синусов, формула нахождения объёма призмы, формулы площади треугольника, квадрата и прямоугольника. Потребуется ввести функцию и найти её наибольшее значение. Причём в задаче имеются лишние данные (о площади участка), которые можно не использовать в решении. А для того, чтобы рассчитать, сколько потребуется бетона или специальных плит для закладки фундамента, необходимо найти нужную информацию (можно воспользоваться информацией, предложенной учителем или найти информацию самостоятельно).

Выделим **этапы решения компетентностной задачи**:

1) анализ текста задачи (определить вид задачи: предметная, межпредметная, практическая);

2) поиск решения задачи:

а) выявление взаимосвязей с другими разделами математики, с другими предметами или сферами деятельности, с жизненными ситуациями;

б) выявление особенностей числовых данных, нахождение недостающих данных или отсев лишних данных, выявление всех взаимосвязей между данными, разделение задачи на несколько более простых, если необходимо;

в) подбор уже известной или составление новой математической модели (уравнение, формула, неравенство, система и т. д.);

г) работа с составленной математической моделью и оценка эффективности данной модели;

3) решение математической задачи и получение ответа;

4) интерпретация полученного результата на языке условия задачи;

5) проверка полученного решения (связь с реальностью, с математическими объектами и т. д.) и запись ответа;

6) анализ полученного результата и получение познавательных следствий (где может использоваться данный результат, какие задачи можно решить аналогичным способом, как можно решить задачу иначе, рациональнее и др.).

При решении компетентностной задачи требуется иначе организовать сам процесс решения: необходим более детальный анализ текста задачи, анализ данных на избыток и недостаток, выявление взаимосвязей с разделами математики, с другими предметами и сферами деятельности, составление математической модели, интерпретация полученного результата. При решении математической задачи эти этапы очень часто пропускаются. Работа с компетентностной задачей потребует от учащихся построения способа разрешения предложенной ситуации с использованием различных математических знаний (геометрических, алгебраических, элементов математического анализа). При этом нужно соотнести полученный математический результат с теми практическими действиями, которые выполняются в реальной практике. Кроме того, учащиеся в ходе решения приходят к новому познавательному результату, который может применяться при решении аналогичных задач.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое система компетентностных задач, и каковы её характеристики?
2. Докажите, что задачи, приведённые в данном параграфе, составляют систему задач.
3. Обоснуйте, почему предложенные задачи можно назвать компетентностными.
4. Решите и подробно опишите каждый этап решения задачи № 12.

§ 4. Способы конструирования компетентностных задач

Анализ учебников, задачников по элементарной математике и другой литературы показал, что компетентностных задач недостаточно, поэтому учитель математики должен либо подобрать для урока такие задачи, либо их сконструировать. Поэтому были разработаны пути и способы конструирования таких задач, предложенные на схемах 2 и 3.

Схема 2

Схема 3

Сконструировать новую задачу

Предметная	**Межпредметная**	**Практическая**
1) выделить понятие, умение, способ и т. д. которое будет развиваться, формироваться; 2) выбрать объект (цилиндр, конус и т. д.) с которым будет происходить работа при решении задачи; 3) выявить взаимосвязи выделенного объекта внутри предметной области «математика»; 4) выбрать методы, с помощью которых предполагается решение задачи; 5) придумать вопрос(ы) и сформулировать условие задачи	1) выделить понятие, умение, способ которые будут развиваться, формироваться; 2) выбрать объект, с которым будет происходить работа при решении задачи; 3) выявить взаимосвязи выделенного объекта с другими предметами школьного курса; 4) выбрать содержание из другого предмета, учитывая знания учащихся; 5) выбрать методы решения задачи; 6) определить степень сложности задачи; 7) определить необходимые дополнительные данные для решения; 8) сформулировать условие задачи	1) выделить понятие, умение, способ и т. д. которое будет развиваться, формироваться; 2) выбрать объект, с которым будет происходить работа при решении задачи; 3) выявить взаимосвязи объекта с жизненными ситуациями и конкретными видами деятельности; 4) выбрать тематику и методы решения задачи; 5) определить дополнительные данные; 6) придумать вопрос(ы) и сформулировать условие задачи

Отметим, что раньше в школе применялась предметная форма обучения, при которой изучалась конкретная тема, решались задачи на закрепление полученных знаний (теорем, определений, свойств и т. д.) в данной теме. Обучение на компетентностной основе предполагает, что мы идём не от темы, а от результата, который хотим получить, под который и подбирается содержание. Также при составлении компетентностных задач мы идём не от темы, а от результата. Определив результат, который хотим получить в ходе решения компетентностной задачи, мы анализируем возможные ситуации (предметные, межпредметные, практические) и подбираем математическое содержание. Но так как чётко прописаны темы по геометрии для обязательного изучения в школе, в каждой теме нужно определить, какого результата мы хотим достигнуть, а затем выделить и построить такие ситуации, чтобы их разрешить с помощью предметного содержания.

Приведём **примеры компетентностных задач** с решениями, которые были сконструированы с использованием схем 2 и 3:

№ 13. *На уроке математики изучали объёмы тел. На дом было задано вычислить объём сосуда, которым пользуются в быту (стакан, ваза для цветов, банка и т. д.). Таня решила вычислить объём вазы (рис. 11) с помощью формулы объёма усеченной пирамиды. Может ли она это сделать? Почему?*

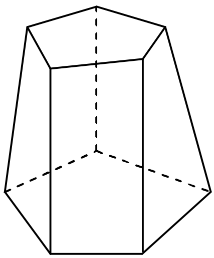


Рис. 11

Решение: Таня не может использовать формулу объёма усеченной пирамиды для вычисления объёма вазы, т. к. если продолжить рёбра усечённой пирамиды, они должны пересечься в одной точке, а для модели (см. рис. 11) данной вазы это не выполняется. Возможно, при производстве изделия был допущен брак.

№ 14. *Деталь, которую необходимо полностью заполнить специальной жидкостью, представляет собой полое тело. Это тело можно получить, если вращать прямоугольник со сторонами a ($a = 2$) и b ($b = 3$) вокруг некоторой оси, проходящей через одну из его вершин, параллельно диагонали прямоугольника. Какой объём жидкости необходим, чтобы* *заполнить деталь? Толщиной стенки детали можно пренебречь* (Практическая задача).

Решение: Чтобы вычислить объём жидкости, необходимой для заполнения детали, нужно вычислить объём детали, которая получится при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его вершин, параллельно диагонали прямоугольника (рис. 12).

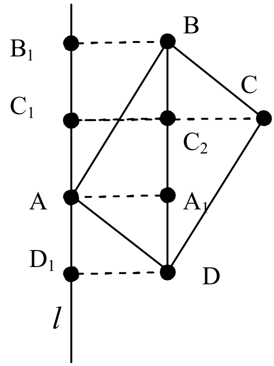


Рис. 12

Чтобы вычислить объём V тела вращения, опустим из точек B, C и D соответствующие перпендикуляры BB_1, CC_1 и AA_1 на прямую l, а из точки A — перпендикуляр AA_1 на прямую BD.

Тогда $V=(V_1+V_2)-(V_3+V_4)$, где V_1 и V_2 — это объёмы тел, полученных при вращении вокруг оси l соответственно трапеций BB_1C_1C и CC_1D_1D; V_3 и V_4 — объёмы тел, полученных при вращении вокруг оси соответственно треугольников ABB_1 и ADD_1. Вычислим $V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot B_1C_1(CC_1^2+CC_1\cdot BB_1+BB_1^2)$;

$V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot C_1D_1(CC_1^2+CC_1\cdot DD_1+DD_1^2)$; $V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot BB_1^2\cdot AB_1$ и

$V_4=\frac{1}{3}\pi\cdot DD_1^2\cdot AD_1$.

Т. к. $BD\parallel l\Rightarrow BB_1=DD_1=AA_1\Rightarrow$ из прямоугольного треугольника $ABD\Rightarrow$ $BD=\sqrt{a^2+b^2}$ и $AA_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$CC_1=2AA_1=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, т.к. $C_1C_2=C_2C=AA_1$.

Тогда $V_1+V_2=\frac{1}{3}\pi(CC_1^2+CC_1\cdot AA_1+AA_1^2)\cdot(B_1C_1+C_1D_1)=$

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{7\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$$

$V_3+V_4=\frac{1}{3}\pi\cdot AA_1^2(AB+BD)=\frac{\pi\cdot a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$ и тогда объём равен $V=\frac{7\pi\cdot a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\pi\cdot a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\cdot\pi a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Следовательно, в зависимости от размеров сторон прямоугольника (т. е. a,b), из последней формулы найдём объём детали.

№ 15. Требуется решить следующую задачу тремя разными способами (вычислительным, векторно-координатным и геометрическим):

На рёбрах AB, AC и SC правильной пирамиды SABCD, у которой все плоские углы при вершине S прямые, взяты соответственно точки D, E и F — середины этих рёбер. Найти угол между прямыми DF и SE. Оцените рациональность каждого из решений. (Предметная задача)

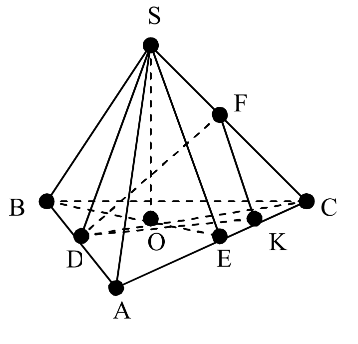


Рис. 13

Решение: **I способ** (вычислительный): сначала построим какой-нибудь угол, равный искомому углу (рис. 13). Например, в плоскости SAC, которая проходит через прямую SE — одну из данных скрещивающихся прямых и точку F, взятую на другой из них, проведём через точку F прямую $FK \| SE$. Тогда угол между прямыми DF и FK равен искомому углу. Обозначим $\angle DFK=\varphi$ и найдем его. Соединим точки D и K. Таким образом, угол φ мы включили в ΔDFK. Вычислим длины сторон треугольника. Пусть сторона основания пирамиды равна а. ΔSAC — равнобедренный, с прямым углом при вершине $S \Rightarrow$ медиана $SE = \frac{1}{2}AC \Rightarrow FK$ — средняя линия $\Delta SEC \Rightarrow FK = \frac{a}{4}$. Рассмотрим ΔSDF и найдём сторону DF, т. к. $SC \perp SA$ и $SC \perp SB$, то $SC \perp SD$. Поэтому в $\Delta SDF \Rightarrow DF = \sqrt{SD^2 + SF^2}$. Но $SD = \frac{a}{2}$; $SF = \frac{1}{2} \cdot SC$, где из прямоугольного равнобедренного ΔSAC находим: $SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ следовательно, $SF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ и тогда $DF = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{4})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Рассмотрим теперь ΔADK: $DK^2 = AD^2 + AK^2 - 2AD \cdot AK \cdot \cos(D\hat{A}K)$, т. е. $DK^2 = \frac{7a^2}{16}$. Из равенства $DK^2 = DF^2 + FK^2 - 2DF \cdot FK \cdot \cos\varphi$ получаем, что $\cos\varphi = 0$, т. е. $\varphi = 90^0$. Это означает, что угол между прямыми DF и SE так же равен 90^0.

<u>II способ</u> (векторно-координатный): т. к. пирамида правильная, то $SA = SB = SC$. Кроме того, все углы при вершине S по условию прямые. Поэтому можно ввести в пространстве прямоугольную систему координат, началом которой является точка S, а отрезки SA, SB и SC — единичными отрезками соответственно осей Sx, Sy и Sz (рис. 14). В этой системе координат точки S, A, B, C имеют следующие координаты: $S(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

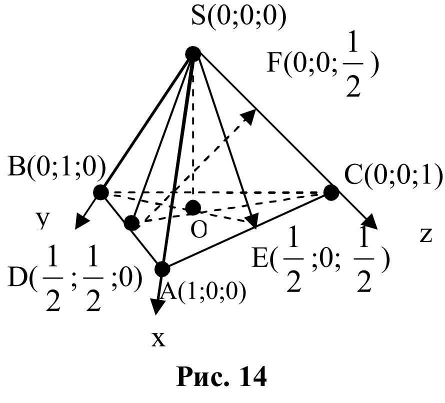


Рис. 14

Теперь найдём координаты векторов $\vec{DF}$ и $\vec{SE}$. Для этого найдём координаты следующих точек: $D(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$, $F(0;0;\frac{1}{2})$, $E(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$. Тогда $\vec{DF}(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ и $\vec{SE}(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$. Следовательно,

$$\cos(\widehat{DF,SE}) = \left|\cos(\widehat{DF,SE})\right| = \frac{\left|-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = 0 \Rightarrow$$ угол между прямыми DF и SE равен 90°.

<u>III способ</u> (геометрический): т. к. отрезки $SA = SB = SC$ попарно перпендикулярны, то можно принять их за рёбра куба, выходящие из одной вершины. Построим этот куб (рис. 15) и заданные точки D, E и F. Соединим вершины P и C куба и проведём диагональ SQ.

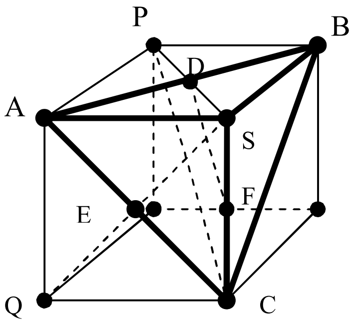


Рис. 15

$DF \| PC$ (т. к. DF — средняя линия ΔPSC), т. е. угол между прямыми PC и SQ равен искомому углу. Прямая AC является проекцией прямой PC на плоскость (SAC) и $AC \perp SQ$ следовательно и наклонная $PC \perp SQ \Rightarrow DF \perp SE$ $\Rightarrow$ угол между прямыми DF и SE равен 90°.

IV способ (векторный): Обозначим (см. рис. 16) $\vec{SA}=\vec{a}$; $\vec{SB}=\vec{b}$; $\vec{SC}=\vec{c}$. Тогда $\vec{DF}=\vec{DS}+\vec{SF}=-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{c}}{2}=\dfrac{\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}}{2}$,

а $\vec{SE}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$.

$\vec{DF}\cdot\vec{SE}=\dfrac{\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}}{2}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{\vec{a}\,\vec{c}-\vec{a}^2-\vec{a}\,\vec{b}+\vec{c}^2-\vec{a}\,\vec{c}-\vec{b}\,\vec{c}}{4}$, но

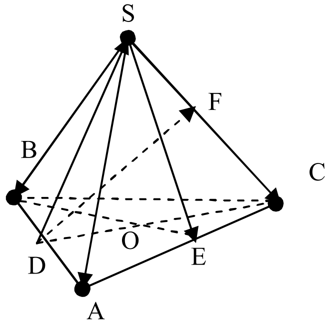


Рис. 16

$\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Кроме того, $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{c}\right|$ и следовательно

$$\vec{DF}\cdot\vec{SE}=\frac{\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2}{4}=\frac{\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2}{4}=0$$

$\Rightarrow$ DF$\perp$SE $\Rightarrow$ угол между прямыми DF и SE равен 90°.

№ 16. *Имеется бревно (рис. 17) длина которого 20 дм, а диаметры спилов 2 дм и 1 дм. Требуется вырубить из бревна брус с квадратными поперечными сечениями, ось которого совпадала бы с осью бревна так, чтобы количество отходов было наименьшим. Как это сделать?*

Рис. 17

(Практическая задача).

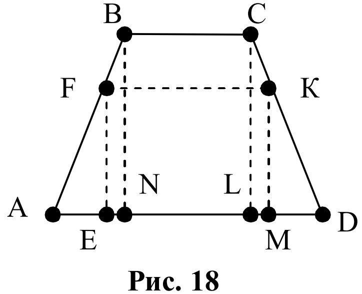


Рис. 18

Решение: С точки зрения математики, наименьшее количество отходов будет тогда, когда объём бруса, будет наибольшим. В связи с этим нужно найти объём бруса, т. е. объём прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием (оптимизируемая величина). Бревно приближённо имеет форму усечённого конуса. В осевом сечении усечённого конуса, которое одновременно является диагональным сечением прямоугольного параллелепипеда, получим (рис. 18) равнобокую трапецию (осевое сечение усечённого конуса), в которую вписан прямоугольник (диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда).

Найдём объём V прямоугольного параллелепипеда. Обозначим буквой x высоту параллелепипеда, т. е. высоту прямоугольника в осевом сечении: $KM = x$ и реальные границы изменения $0 < x \le 20$. Отрезок FK представляет собой диагональ основания параллелепипеда. $FK = EM = AD - 2MD = 2 - 2MD$.

Проведём $CL \perp AD$. Тогда получаем

$$LD = AN = AD - AL = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \text{ дм.}$$

Из подобия треугольников KMD и $CLD \Rightarrow \dfrac{KM}{CL} = \dfrac{MD}{LD}$,

т. к. $\dfrac{x}{20} = \dfrac{MD}{0{,}5} \Rightarrow MD = \dfrac{x}{40}$ и значит $FK = 2 - 2MD = 2 - \dfrac{x}{20}$.

Площадь квадрата, служащего основанием прямоугольного параллелепипеда находим по формуле $\dfrac{1}{2}d^2$, где d — диагональ основания, а $d = FK$. Значит $S_{осн} = \dfrac{1}{2}(2 - \dfrac{x}{20})^2$, т. к. высота параллелепипеда равна x, то $V = \dfrac{1}{2}(2 - \dfrac{x}{20})^2 \cdot x$. Рассмотрим функцию $V(x)$ и найдем для неё наибольшее значение на промежутке $(0;20]$.

$$V' = \frac{1}{2}(2 - \frac{x}{20})(-\frac{1}{20})x + \frac{1}{2}(2 - \frac{x}{20})^2 = \frac{1}{2}(2 - \frac{x}{20})(1 - \frac{3x}{40}).$$

$V'(x) = 0$ при $x = 40$ или при $x = \dfrac{40}{3} = 13\dfrac{1}{3}$, но $x = 40$ не принадлежит промежутку $(0,20]$. Сравним между собой значения функции $V(x)$ в точках $x=\frac{40}{3}$ ($V(\frac{40}{3})=\frac{320}{27}$) и $x=20$ ($V(20)=10$) и найдём $\lim\limits_{x\to 0}V(x)=0$. Получили, что наибольшим значением функции является $\frac{320}{27}$.

Интерпретируем полученный результат: чтобы вырубить из бревна брус наибольшего объёма, нужно удалить верхнюю (более тонкую) часть бревна так, чтобы осталось бревно высотой $13\frac{1}{3}\,\text{дм}\approx 133\,\text{см}$, а затем из полученного бревна вырубить брус с квадратным поперечным сечением (это сечение определяет квадрат, вписанный в верхнее основание бревна высотой $13\frac{1}{3}\,\text{дм}$).

Для этого нужно определить и провести диаметр верхнего спила бревна, затем диаметр нижнего спила. На диаметре нижнего спила отсечь от центра радиусы, равные радиусам верхнего спила, начертить квадрат, для которого полученный отрезок (удвоенный радиус верхнего спила) будет являться диагональю. В верхний спил вписать квадрат. Затем с помощью специальной распилочной машины выпилить брус по сделанной разметке.

Вопросы для самопроверки:

1. Перечислите способы конструирования компетентностных задач?
2. Должен ли, по Вашему мнению, учитель математики уметь конструировать компетентностные задачи?
3. Согласны ли Вы, что приведённые в этом параграфе примеры задач можно отнести к компетентностным? Ответ обоснуйте.

§ 5. Методические задания для работы с компетентностными задачами

Показателем уровня предметно-методической компетентности будущего учителя математики служит умение решать и методически обрабатывать компетентностные задачи. Под **методической обработкой компетентностных задач** будем понимать: умение выделять познавательные результаты, полученные при решении задачи; умение устанавливать избыточность (недостаточность), противоречивость данных задачи; умение «считывать» информацию, представленную в разных формах; умение подбирать необходимые для решения знания (как математические, так и нематематические) — все эти умения связаны с процессом решения задачи, а также умение преобразовывать традиционные математические задачи в компетентностные (*достраивать задачу до компетентностной).*

Будущий учитель математики должен не только решать компетентностные задачи, но также уметь отбирать и конструировать такие задачи. Поэтому было решено дополнить компетентностные задачи специальным образом составленными *методическими заданиями*, которые направлены на овладение приёмами методической работы с предложенным математическим учебным содержанием (понятием, теоремой, задачей и т. д.).

Сформулируем требования к методическим заданиям:

1. Открытость. Данное требование связано с тем, что задание может иметь несколько вариантов ответов; могут быть различные способы выполнения задания и имеется возможность переформулировки (изменения) задания, в зависимости от знаний и индивидуальных особенностей учащихся.

2. Связь с практикой обучения математике в общеобразовательной школе. Задания не должны быть «оторваны» от материала, который изучается в школьном курсе математики. Это будет способствовать мотивации студентов, повторению школьного курса и подготовке к педагогической практике.

3. Проблемность и новизна. Задания формулируются как проблема, которую необходимо разрешить средствами конкретного предмета, способ выполнения задания студенту не известен или состоит из комбинации известных способов, что требует проявления творчества.

4. Использование знаний из курса методики обучения математике. Для выполнения заданий должны применяться уже имеющиеся знания из вузовского курса методики, а предлагаемые задания должны способствовать расширению методических умений.

Методические задания для работы с компетентностными задачами мы подразделяем на четыре категории:

1. Задания, которые предполагают работу до решения задачи.

2. Задания, связанные непосредственно с процессом решения задачи.

3. Задания, связанные с работой после решения задачи.

4. Задания, связанные с умением составлять компетентностные задачи.

Приведём примеры таких заданий:

1. Задания, которые предполагают работу до решения задачи.

1. Проведите анализ школьных учебников по геометрии на наличие в них компетентностных задач по теме «Стереометрия» и заполните таблицу (табл. 5).

Таблица 5

№	*Учебник*	*Тема*	*Компетентностная задача (№, стр.)*	*Вид задачи*	***Обоснование*** (почему задача компетентностная)

***Сделайте вывод**: каково соотношение компетентностных и обычных математических задач в школьных учебниках по геометрии?*

Задание выполняется каждым студентом индивидуально и в дальнейшем данные, полученные при выполнении этого задания, можно будет использовать на последующих занятиях при выполнении других заданий. Это задание развивает умение анализировать литературу, делать выводы и отличать компетентностные задачи от обычных математических.

2. Опишите реальную ситуацию, в которой нужно было бы решить следующую математическую задачу: «Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин».

3. Переформулируйте условие задачи так, чтобы она стала межпредметной компетентностной задачей: «Телефонная проволока длинной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где её прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает». *Докажите, что Вашу задачу можно отнести к указанному виду.*

4. Являются ли следующие задачи компетентностными:

А) Металлический куб имеет внешнее ребро 10,2 см и массу 514, 15 г. Толщина стенок равна 0,1 см. Определите, из какого металла сделан куб.

Б) Чугунная труба имеет квадратное сечение, её внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Какова масса одного погонного метра трубы?

В) Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 14 м, верхним 8 м и высотой 3,2 м. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.

Г) Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от паука вершин куба. Как должен двигаться паук?

Обоснуйте свою точку зрения. Как можно переформулировать условие задачи, чтобы она стала компетентностной?

5. Опишите ситуацию иначе или переформулируйте условие задачи, чтобы стала понятна, значимая цель решения задачи:

А) Свинцовая труба с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса 25 м этой трубы?

Б) Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найдите объём кучи щебня.

Можно ли отнести задачи после переформулировки к компетентностным?

6. Проанализируйте ситуацию: «Над столом, размеры которого 120 см $\times$ 150 см, на высоте 2 м висит лампа. Диаметр абажура лампы 30 см. Свет, падающий на стол, освещает поверхность стола, образуя круг диаметром 1 м. На какой высоте от стола нужно повесить лампу, диаметр абажура которой равен 50 см, чтобы свет освещал тот же круг на столе (диаметр 1 м)?».

Ответьте на следующие вопросы: 1) о чём идёт речь в задаче; 2) какие факты, величины необходимо знать, чтобы решить задачу; 3) что известно и что не известно в задаче; 4) насколько реальна описанная в условии ситуация? Какие ещё вопросы можно поставить к задаче?

2. Задания, связанные непосредственно с процессом решения задачи.

7. Решить предметную компетентностную задачу. Описать математическую модель, с помощью которой решалась задача, и заполнить таблицу (табл. 6):

Таблица 6

№	Задание	Результат
1.	*Провести анализ текста задачи*	
2.	*Выявить данные существенные для математических действий*	
3.	*Соотнести данные и требования задачи с известными математическими моделями*	
4.	*Выявить недостающие данные (если они есть) и дополнить их из имеющегося опыта, из литературы, из справочников (источник указать)*	
5.	*Исключить лишние данные (если они есть)*	
6.	*Построить модель (уравнение, система уравнений и т. д.)*	
7.	*Решить задачу (возможно путём построения другой модели)*	
8.	*Ответить на вопрос задачи*	
9.	*Сделать выводы: где ещё можно применить данный способ решения, можно ли решить задачу другим способом и т. д.*	

8. Решить межпредметную компетентностную задачу. Описать математическую модель, с помощью которой решалась задача, и заполнить таблицу (табл. 7):

Таблица 7

№	**Задание**	**Результат**
1.	*Провести анализ текста задачи*	
2.	*Определить связь с другим предметом (физика, химия и т. д.) Выявить данные существенные для осуществления действий в других науках*	
3.	*Выявить данные существенные для математических действий*	
4.	*Соотнести данные и требования задачи с известными математическими моделями*	
5.	*Выявить недостающие данные (если они есть) и дополнить их из имеющегося опыта, из литературы, из справочников (источник указать)*	
6.	*Исключить лишние данные (если они есть)*	
7.	*Выбрать (построить) модель и применить её для математизации ситуации задачи*	
8.	*Решить задачу (возможно путём построения другой модели)*	
9.	*Интерпретировать полученный результат в соответствии с вопросом компетентностной задачи*	
10.	*Сделать выводы: где ещё можно применить данный способ решения, можно ли решить задачу другим способом и т. д.*	

9. Решить практическую компетентностную задачу. Описать математическую модель, с помощью которой решалась задача, и заполнить таблицу (табл. 8):

Таблица 8

№	Задание	Результат
1.	*Провести анализ текста задачи*	
2.	*Выявить данные существенные для математических действий*	
3.	*Выявить данные существенные для осуществления действий на практике*	
4.	*Соотнести данные и требования задачи с известными математическими моделями*	
5.	*Выявить недостающие данные (если они есть) и дополнить их из имеющегося опыта, из литературы, из справочников (источник указать)*	
6.	*Исключить лишние данные (если они есть)*	
7.	*Выбрать (построить) модель и применить её для математизации ситуации задачи*	
8.	*Решить задачу (возможно путём построения другой модели)*	
9.	*Интерпретировать полученный результат в соответствии с вопросом компетентностной задачи*	
10.	*Сделать выводы: где ещё можно применить данный способ решения, можно ли решить задачу другим способом и т. д.*	

10. *Решить задачу из задания № 6 и прописать каждый этап решения. Какие вопросы должен будет задавать учитель школьникам, чтобы им легче было решить данную задачу? Поставьте вопросы к каждому этапу решения и предложите возможные ответы на них. Какие знания нужны учащимся, чтобы ответить на поставленные вопросы?*

11. Решите задачу: «Имеется бревно (рис. 17) длина которого 20 дм, а диаметры спилов 2 дм и 1 дм. Требуется вырубить из бревна брус с квадратными поперечными сечениями, ось которого совпадала бы с осью бревна так, чтобы количество отходов было наименьшим. Как это сделать*?» Опишите этапы решения задачи. С какими трудностями при решении Вы столкнулись? С чем они связаны? Целесообразно ли давать такую задачу школьникам (ответ обоснуйте)?*

12. Дана задача: «При проведении опыта, жидкость, налитая в конический сосуд высотой 0,18 м и диаметром основания 0,24 м (она заполняет весь сосуд), переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,1 м. Какой высоты нужно взять цилиндрический сосуд, чтобы жидкость занимала ровно половину его объёма (1/3 объёма)?» *Какие знания необходимы для решения этой задачи из области «математика» и из других предметов? Опишите математическую модель ситуации и решите задачу. Можно ли применить другие математические модели для решения данной задачи?*

3. Задания, связанные с работой после решения задачи.

13. *Ответьте после решения задачи из задания № 11 на следующие вопросы: какой получен результат, о чём этот результат, как Вы пришли к этому результату, что ещё можно узнать таким способом?*

14. *Укажите, какие необходимы знания (математические, нематематические) для решения задачи из задания № 11 (№ 12) и объясните, почему именно эти знания были использованы. Можно ли решить задачу другим способом?*

15. *Поставьте другие вопросы к задаче из задания № 11 (№ 12). Будут ли эти задачи компетентностными?*

4. Задания, связанные с умением составлять компетентностные задачи.

16. Выберите из списка задачу, которая может быть использована для разрешения следующей ситуации: «Требуется засыпать старую шахту, глубина которой не известна. Чтобы возить песок, нужно выписать машину на определённое время, т. е. нужно указать количество часов работы машины».

Задачи:

1) Определите объём прямого кругового цилиндра, если известны диаметр основания и его высота.

2) На окружности основания цилиндра взяты точки A, B и C — такие, что $\angle ABC = 90^\circ$. Через прямые AC и BC проведе-

ны секущие плоскости, параллельные оси цилиндра. Площади полученных сечений равны S_1 и S_2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3) Вычислите объём песка, который помещается в кузов ($3\ м \times 1{,}5\ м \times 1\ м$) грузовой машины. Если песок будет насыпан с «горкой», то «горка» будет составлять 20 % от объёма кузова.

4) В цилиндре параллельно его оси на расстоянии а от неё проведена секущая плоскость, которая от окружности основания отсекает дугу α. Площадь сечения равна S. Найдите объём цилиндра.

17. Дана задача: «В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см. Вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см. Найдите площадь поверхности вписанной в пирамиду сферы». *Можно ли связать данную задачу с жизненными ситуациями? Приведите пример.*

18. Составьте компетентностную (предметную, межпредметную, практическую) стереометрическую задачу, для решения которой необходимы знания из темы «Двугранный угол» (темы могут быть разные) и решите её. Опишите способ составления задачи и алгоритм её решения. Докажите, что составленная вами задача является компетентностной. С какими трудностями Вы столкнулись при составлении задачи?

Данное задание выполняется в группах из трёх человек, оно развивает умение работать в малых группах, умение обосновывать свою точку зрения, приводить аргументы, умение делать выводы, составлять алгоритм решения (выделять этапы) и самое главное, формирует умение конструировать компетентностные задачи.

19. Составьте предметную компетентностную задачу, для решения которой нужны знания из темы «_____________», используя следующий план:

1) определить, чему мы хотим научить учащегося (выделить понятие, умение, способ и т. д.);

2) выбрать объект, с помощью которого будем изучать понятие, умение, способ, формулу и др.;

3) выявить взаимосвязи выделенного понятия, умения или объекта (призма, плоскость, цилиндр, конус и т. д.) внутри предметной области «математика» (сначала в изучаемой теме,

затем в предмете геометрия и, наконец, связь с алгеброй и математическим анализом);

4) учесть знания, имеющиеся у учащихся и выбрать методы, с помощью которых предполагается решение задачи (найти, вычислить, построить, придумать и т. д.);

5) определить степень сложности задачи (недостающие или лишние данные; формулы и знания, используемые при решении; способ построения математической модели; количество вопросов и т. д.) и продумать вопросы, на которые должны будут ответить учащиеся;

6) сформулировать условие задачи в доступной для учащихся форме.

Определить уровень сложности составленной задачи.

20. Составьте межпредметную компетентностную задачу для решения которой нужны знания из темы «____», используя следующий план:

1) определить, чему мы хотим научить учащегося (выделить понятие, умение, формулу, способ и т. д.);

2) выбрать объект, с помощью которого будем изучать понятие, умение, способ, формулу и др.;

3) выявить взаимосвязи выделенного объекта (призма, плоскость, цилиндр, конус и т. д.) с другими предметами школьного курса (физикой, биологией, химией, географией и т. д.);

4) выбрать знания из другого предмета, с которыми будут работать учащиеся при решении задачи;

5) учесть знания, имеющиеся у учащихся, как по математике, так и по выбранной теме из других предметов, и выбрать методы, с помощью которых предполагается решение задачи (найти, вычислить, построить, придумать и т. д.);

6) определить степень сложности задачи (недостающие или лишние данные; формулы, знания и межпредметные связи, используемые при решении; способ построения математической модели; количество вопросов и т. д.);

7) определить, какие дополнительные данные нужно будет использовать учащимся при решении, и продумать вопросы, на которые должны будут ответить учащиеся;

8) сформулировать условие задачи в доступной для учащихся форме.

Определить уровень сложности составленной задачи.

21. Составьте практическую компетентностную задачу, для решения которой нужны знания из темы «____», используя следующий план:

1) определить, чему мы хотим научить учащегося (выделить понятие, умение, формулу, способ и т. д.);

2) выбрать объект, с помощью которого будем изучать понятие, формулу, отрабатывать умение, способ и др.;

3) учитывая интересы и возраст учащихся, выявить взаимосвязи выделенного объекта (призма, плоскость, цилиндр, конус и т. д.) с реальными жизненными ситуациями и конкретными видами деятельности (строительство, медицина, реклама и др.);

4) выбрать тематику (опираясь на пункт 3), с которой будут работать учащиеся при решении задачи;

5) учесть знания, имеющиеся у учащихся, как по математике, так и по выбранной тематике, и выбрать методы, с помощью которых предполагается решение задачи (найти, вычислить, построить, придумать и т. д.);

6) определить степень сложности задачи (недостающие или лишние данные; формулы и знания, используемые при решении; способ построения математической модели; количество вопросов и т. д.);

7) определить, какие дополнительные данные нужно будет использовать учащимся при решении задачи, и продумать вопросы, на которые должны будут ответить учащиеся;

8) сформулировать условие задачи в доступной для учащихся форме.

Определить уровень сложности составленной задачи.

22. Опишите способ составления компетентностной задачи. Какими ещё способами, по вашему мнению, можно составить компетентностные задачи по стереометрии? Предложите свой алгоритм составления задач.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое методическая обработка компетентностных задач?
2. Для чего нужны методические задания?
3. Перечислите требования к методическим заданиям?
4. Какие категории методических заданий можно выделить? Можете ли Вы предложить свои категории заданий?
5. Докажите, что предложенные примеры заданий соответствуют требованиям, предъявляемым к методическим заданиям.

§ 6. Практические занятия

Для студентов направления «Педагогическое образование» профиль «Математика» был разработан курс по выбору «Компетентностные задачи по геометрии». В качестве математического содержания использовался курс стереометрии.

Основная цель проведения данного курса — научить студентов осуществлять такие методические действия как:

- отличать компетентностные задачи от обычных математических, т. е. умение узнавать и выбирать такие задачи;
- решать компетентностные задачи (предназначенные для студентов);
- конструировать компетентностные задачи разных видов и разных уровней сложности (для школьников).

Данный курс предполагает лекционные занятия, которым соответствует теория, изложенная в первых четырёх параграфах пособия и практические занятия, представленные в данном параграфе.

Занятие № 1

Тема: «***Реализация учебно-познавательной компетентности на уроках стереометрии***»

Задание 1. Выберите из предложенного списка умения, которые можно отнести к составляющим учебно-познавательной компетентности учащихся (применительно к математике):

- умение самостоятельно находить нужную информацию в различных источниках;
- умение использовать для получения информации только учебник по предмету;
- умение решать задачи по предмету только из школьного учебника;
- умение находить недостающие данные и «отсеивать» лишние данные;
- умение использовать алгоритмы решения задач;

- умение «переводить» условие задачи на математический язык, т. е. строить математическую модель описанной ситуации;
- умение анализировать данные;
- умение делать выводы;
- интерпретация полученных результатов;
- применение ранее изученного материала при решении задач;
- применение знаний из жизни (и знаний другого предмета) при решении математических (и других) задач;
- умение использовать математические знания при решении возникающих жизненных проблем;
- умение самостоятельно оценивать свои результаты;
- умение решать задачи разного уровня сложности и нестандартные задачи.

Задание 2. Ниже описаны две ситуации. Какая из них Вам нравится больше и почему? Укажите достоинства и недостатки каждой ситуации, ошибки учителя. Что бы Вы изменили в каждой из ситуаций? Что, по-вашему мнению, могло бы способствовать формированию учебно-познавательной компетентности? Как урок по теме «Теорема о трёх перпендикулярах» построили бы Вы, реализуя компетентностный подход к обучению?

Ситуация № 1. На уроке геометрии по теме «Теорема о трёх перпендикулярах» (10 класс) учитель математики без объявления темы в начале урока предлагает учащимся решить самостоятельно следующую задачу: *На строящийся дом размером $8\times 10\times 4$ метров, строители устанавливают равноскатную крышу. Уже поставили опорные балки, высотой 3 метра, перпендикулярно поверхности чердака. Сколько упаковок черепицы нужно купить для покрытия крыши, если известно, что одна упаковка рассчитана на покрытие площади в 2,7 $м^2$?*

Учащиеся сразу же приступают к решению: делают рисунок и вводят обозначения. Один из учеников задаёт учителю вопрос: «Что такое равноскатная крыша и опорная балка?» Учитель спрашивает у учащихся, кто может ответить на этот вопрос и вместе с классом разбирают, что это такое и показывает на рисунке (учитель делает рисунок 19).

Затем учитель вызывает наиболее слабого ученика к доске (рисунок уже выполнен на доске учителем) и решение записывается на доске:

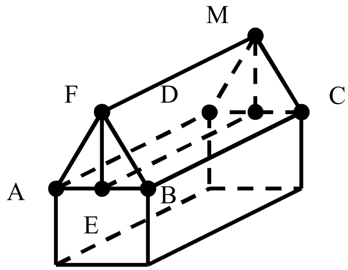


Рис. 19

Дано: $AB = 8м$; $BC = 10м$; $EF = 3м$; $BK = 4м$; $AF = FB$; $EF \perp (ABCD)$.

Найти: $S = S_{AFMD} + S_{BFMC}$.

Решение: $AF = FB \Rightarrow \Delta AFB$ - *равнобедренный, а т. к.* $EF \perp (ABCD)$, *то* $EF \perp ABC$, *а в равнобедренном треугольнике высота является медианой и биссектрисой* $\Rightarrow$ $AE = \frac{1}{2}AB = 4(м)$; ΔAFE — *прямоугольный* $\Rightarrow$ *по теореме Пифагора* $AF = FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5(м)$.

Учащиеся задают учителю вопрос: «А зачем нам дана высота дома, если в решении мы её нигде не применяем?»

Учитель объясняет, что в задачах могут быть лишние данные или же данных может не хватать. Лишние данные просто исключаются, а если данных для решения не хватает, то их необходимо получить каким-либо способом (вычислить, применить знания из жизни, найти в источниках и т. д.)

Далее ученик у доски говорит, что т. к. $AFMD$ и $FBCM$ — прямоугольники, то мы можем найти их площадь. Тогда учитель спрашивает: «А ты уверен, что $AFMD$ и $FBCM$ являются прямоугольниками? Это ещё нужно доказать».

Учащимся предлагается доказать, что $AFMD$ и $FBCM$ прямоугольники. Один ученик говорит, что это очевидно, т.к. крышу всегда делают так, что она состоит из прямоугольников. Тогда учитель говорит, что это можно доказать математически, а для этого нужно изучить теорему о трёх перпендикулярах.

Далее учащимся предлагается оставить место для завершения решения данной задачи, а учитель записывает тему на доске «Теорема о трёх перпендикулярах», формулирует условие теоремы, делает рисунок, проводит доказательство. Учитель вызывает ученика к доске и просит повторить условие теоремы и показать на рисунке к задаче перпендикуляр, наклонную, проекцию и прямую, проходящую через основание наклонной. После чего, возвращаются к решению задачи.

По теореме о трёх перпендикулярах: EF перпендикуляр к плоскости $(ABCD)$, AF — наклонная, AE — проекция наклонной, AD — прямая, проходящая через основание наклонной. Доказывают, что $AFMD = BFMC$ — прямоугольники $\Rightarrow$ $S_{AFMD} = S_{BFMC} = AF \cdot AD = 50\,(м^2)$; $S = 2S_{AFMD} = 2 \cdot 50 = 100\,(м^2)$ $\Rightarrow$ 100 : 2,7 $\approx$ 37,03.

Учитель обращает внимание учащихся на то, что нужно ответ округлить с избытком, иначе черепицы не хватит.

Ответ: *для покрытия этой крыши необходимо купить 38 упаковок черепицы.*

Учитель спрашивает, есть ли вопросы по решению задачи. Далее учитель задаёт домашнее задание, и предлагает решить задачи по изученной теме из учебника.

Ситуация № 2. Учитель математики в начале урока проверяет выполнение домашнего задания.

Учитель формулирует тему урока: «Теорема о трёх перпендикулярах» и записывает её на доске. Далее предлагает открыть учебник и прочитать условие теоремы, после чего просит повторить его кого-нибудь из учащихся. Учитель на рисунке, который заранее построен на доске, показывает основные элементы и ещё раз объясняет условие теоремы. Учитель проводит подробное доказательство на доске, учащиеся записывают в тетрадь.

Далее учитель предлагает разобрать устно задачу из учебника, которая там уже решена: *Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.*

Учитель спрашивает: «Как вы считаете, может ли знание данной теоремы, пригодиться вам в жизни?»

После ответов учащихся учитель предлагает решить задачу про дом из ситуации 1. Учитель, вместе с учащимися анализирует условие задачи: разбирая, что такое равноскатная крыша, опорные балки, выявляются лишние данные, одновременно делается рисунок и выясняется, что нужно найти, чтобы ответить на вопрос задачи.

Затем учитель вызывает одного ученика к доске, который записывает решение задачи на доске. Учитель при этом помогает правильно обосновать каждый шаг и если необходимо задаёт вопросы классу.

После записи ответа, учитель спрашивает, всё ли понятно по решению этой задачи, отвечает на вопросы учащихся (если они есть), делает выводы. На доске учитель записывает номера задач из учебника: слабые учащиеся вызываются к доске для решения задач с помощью учителя, более сильные учащиеся решают самостоятельно, и могут сверяться с решением на доске. В конце урока подводятся итоги урока, задаётся домашнее задание.

Задание 3. Подумайте, какими способами можно формировать учебно-познавательную компетентность на уроках математики (на примере курса стереометрии). Представьте результат в виде схемы.

Задание 4. В чём особенность изучения курса «Стереометрия»? Какие умения необходимы учащимся для успешного усвоения данного курса? Составьте список таких умений.

Занятие № 2

Тема: «***Компетентностная задача***»

Задание 1. Выберите из списка требования, которым, по Вашему мнению, должна удовлетворять компетентностная задача:

1) общекультурная и социальная значимость получаемого результата, это обеспечивает познавательную мотивацию учащегося;

2) для решения задачи используются знания из других разделов математики и других школьных предметов;

3) используются только знания изучаемого раздела математики;

4) цель решения компетентностной задачи — заключается не столько в получении ответа, сколько в присвоении нового знания (метода, способа решения, приёма), с возможным переносом на другие предметы;

5) для решения задачи используются знания из жизни или какой-либо конкретной сферы деятельности (строительство, домашнее хозяйство, спорт и др.);

6) по структуре эти задачи — нестандартные, т. е. в структуре задачи обязательно неопределены некоторые из её компонентов;

7) задача решается по определённому алгоритму и имеет единственное решение;

8) объёмная формулировка задачи;

9) достаточно простая формулировка задачи;

10) задача может состоять из двух и более простых задач;

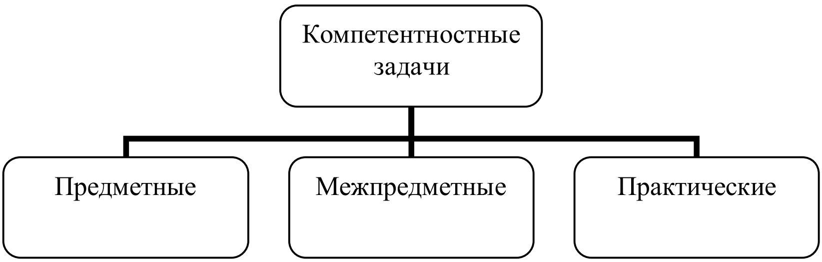
11) решение задачи не требует интерпретации условия и дополнительного анализа;

12) в задаче имеются лишние данные или не хватает данных для решения;

13) решение не требует построения рисунка;

14) возможно наличие нескольких путей решения.

Задание 2. Из приведённого списка задач выберите компетентностные и заполните схему:



Задачи:

1. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1, M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и если $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м.
2. Три фонаря в туннеле висят на равных расстояниях друг от друга, но на разных высотах. Вершины фонарей рас-

положены на одной прямой. Найти высоту второго фонаря, если высоты первого 3 м, третьего — 5 м.

3. Сколько рулонов обоев нужно купить, чтобы переклеить две смежные стены в комнате, если известно, что длина комнаты 5 м, ширина 4 м и известно расстояние 5 м между противоположными углами стены, по которой измеряли ширину комнаты. Ширина рулона обоев — 0,5 м, а длина обоев в одном рулоне — 10 м.
4. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.
5. Прямые АВ, АС и АД попарно перпендикулярны. Найдите отрезок СД, если АВ = 3 см, ВС = 7 см, АД = 1,5 см.
6. На строящийся дом размером 8×10 метров, строители устанавливают равноскатную крышу. Уже поставили опорные балки, высотой 3 метра, перпендикулярно поверхности чердака. Сколько упаковок черепицы нужно купить для покрытия крыши, если известно, что одна упаковка рассчитана на покрытие площади в 2,7 м^2?
7. Через точки А и В проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие её в точках С и Д соответственно. Найдите расстояние между точками А и В, если АС = 3 м, ВД = 2 м, СД = 2,4 м и отрезок АВ не пересекает плоскость α.
8. После 7 стирок кусок хозяйственного мыла уменьшился вдвое по длине, ширине и высоте. На сколько стирок его ещё хватит?
9. Над столом, на высоте 2 м, висит лампа, диаметр абажура которой 30 см. Свет, падающий на стол, освещает поверхность стола, образуя круг диаметром 1 м. На какой высоте от стола нужно повесить лампу, диаметр абажура которой равен 50 см, чтобы свет освещал тот же круг на столе (диаметр 1 м).
10. Точка А отстоит от плоскости на расстоянии h. Найдите длины наклонных, проведённых из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.
11. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 м и 24 м. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плос-

кости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника.

12. Сколько нужно заказать на складе килограммовых (массой в 1 кг) банок краски, чтобы покрасить 100 алюминиевых ведер (см. рис. 20), если на 1 м^2 требуется 150 г краски?
13. Боковое ребро наклонной призмы равно 15 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту призмы.
14. Ребро куба равно а. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.
15. Имеется подарочная коробка размером 30 см$\times$15 см$\times$10 см. Сколько килограммов почти одинаковых по размеру и весу мандарин поместится в коробку, если диаметр одного мандарина 5 см, а вес 85 г.

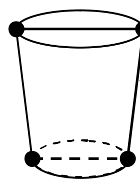


Рис. 20

16. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна 512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50 м^2.
17. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечён плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.
18. Точка O середина бокового ребра AA_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$. $AA_1 = 20\sqrt{5}$, $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Найти $\sin\alpha$, где α — угол между AC_1 и B_1O.
19. В конусе даны радиус основания и высота Н. Найдите ребро вписанного в него куба.
20. Имеется несколько одинаковых кирпичей. Необходимо найти способ измерения диагонали кирпича с помощью линейки.

21. Луч света входит в прямой трёхгранный угол и отражается от всех трёх граней по одному разу. Как изменится направление луча?
22. Торговцу мороженого предлагают два вида коробок для

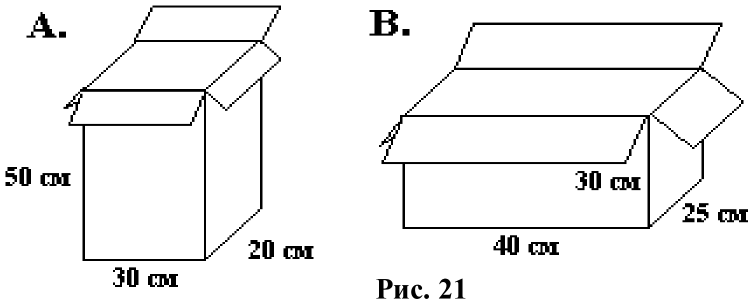


Рис. 21

мороженого (см. рис. 21). Коробки одинаковые по вместимости, но нужно выбрать ту, в которой мороженое будет таять медленнее. Правильный ли делает выбор торговец, если хочет выбрать вариант A?
23. Сегодня в рекламном бизнесе весьма популярны динамические рекламные блоки. Один из таких блоков представлен на рисунке 22. Он представляет собой правильную треугольную призму со стороной основания 8 м, высотой 4 м, вращающуюся на цилиндрическом основании, на высоте 14 м. А) Определите, каким образом ось цилиндра должна проходить через призму, чтобы конструкция находилась в равновесии. Б) Вычислите площадь рекламного места этого блока.

Рис. 22

24. В геометрии справедлива следующая теорема: при данном объёме из всех пирамид, у которых ребра равны, правильный тетраэдр имеет наименьшую площадь поверхности. А) Вы разработчик новой тары фирмы N.

Убедите изготовителей молочных продуктов, что им выгодны пакеты для молока в форме тетраэдра. Б) Вы разработчик новый тары, но конкурент фирмы N. Убедите изготовителей молочных продуктов, что им невыгодны пакеты для молока в форме тетраэдра. В) Пакет молока имеет форму правильного тетраэдра с ребром 15 см, нарисуйте развёртку этого пакета на плоскость в масштабе 1:5 см. Г) Определите расход бумаги (в м^2) для изготовления 100 пакетов, описанных в пункте В.

25. В приоткрытую книгу вставили карандаш, длина которого 15 см. Ширина книги 20 см. Найдите угол, который образовался между страницами.

Задание 3. Проведите анализ школьных учебников по геометрии на наличие в них компетентностных (стереометрических) задач и заполните таблицу:

Учебник	**Тема**	**Компетентностная задача (№, стр.) и её вид**

Занятие № 3

Тема: «***Виды компетентностных задач***»

Занятие проводится в группах. Студенты подбирают задачи из разных учебников, которые им предложены; результаты заносят в общую таблицу. В результате совместной работы, делаются выводы и представляются одним из участников группы.

Группа 1

Задание № 1. Подобрать из школьных учебников по геометрии и другой литературы (журналы, сборники задач) предметные компетентностные задачи (записать условие) и заполнить таблицу:

Предметные компетентностные задачи

На построение	На доказательство	На нахождение величин	Другие

Указать источник, из которого взята задача.

Задание № 2. Решить одну из найденных компетентностных задач на нахождение величин и описать алгоритм её решения. Представить полученные результаты.

Группа 2

Задание № 1. Подобрать из школьных учебников по геометрии и другой литературы (журналы, сборники задач) межпредметные компетентностные задачи (записать условие) и заполнить таблицу:

Межпредметные компетентностные задачи

На построение	На доказательство	На нахождение величин	Другие

Указать источник, из которого взята задача.

Задание № 2. Решить одну из найденных компетентностных задач на нахождение величин и описать алгоритм её решения. Представить полученные результаты.

Группа 3

Задание № 1. Подобрать из школьных учебников по геометрии и другой литературы (журналы, сборники задач) практические компетентностные задачи (записать условие) и заполнить таблицу:

Практические компетентностные задачи

На построение	На доказательство	На нахождение величин	Другие

Указать источник, из которого взята задача.

Задание № 2. Решить одну из найденных компетентностных задач на нахождение величин и описать алгоритм её решения. Представить полученные результаты.

Занятие № 4, № 5

Тема: «***Решение компетентностных задач***»

Задание № 1. Работая в парах (или индивидуально), решить предложенную задачу по прилагаемому алгоритму:

1) определить вид задачи: предметная, межпредметная, практическая;

2) выявить взаимосвязи с другими разделами математики, с другими предметами или сферами деятельности, с жизненными ситуациями;

3) определить особенности числовых данных, найти недостающие данные или «отсеять» лишние данные, выявить все взаимосвязи между данными, разделить задачу на несколько более простых (если это необходимо);

4) подобрать уже известную или составить новую математическую модель (уравнение, формула и т. д.) задачи;

5) поработать с составленной математической моделью и оценить эффективность данной модели;

3) решить математическую задачу и получить ответ;

4) интерпретировать полученный результат на языке условия задачи;

5) проверить полученное решение (связь с реальностью, с математическими объектами и т. д.) и записать ответ;

6) провести анализ полученного результата и получить познавательные следствия (где может использоваться данный результат, какие задачи можно решить аналогичным способом, как можно решить задачу иначе, рациональнее и др.).

Задание № 2. Описать каждый этап решения. Поставить вопросы к каждому этапу. Полученные решения обсудить за «круглым столом».

Занятие № 6, № 7

Тема: «*Способы конструирования компетентностных задач*»

Задания выполняются в группах или могут выполняться каждым учащимся индивидуально.

Группа 1

Задание № 1. Составьте предметную компетентностную задачу, для решения которой обязательно применяются знания по теме: *«Параллельность прямых и плоскостей»*, используя следующий план:

1) определить, чему мы хотим научить учащегося (выделить понятие, умение, способ и т. д.) в ходе решения задачи;

2) выбрать объект, с помощью которого будем изучать понятие, умение, способ, формулу и др.;

3) выявить взаимосвязи выделенного понятия, умения или объекта (призма, плоскость, цилиндр, конус и т. д.) внутри предметной области «математика» (сначала в изучаемой теме, затем в предмете геометрия и, наконец, связь с алгеброй и математическим анализом);

4) учесть знания, имеющиеся у учащихся и выбрать методы, с помощью которых предполагается решение задачи (найти, вычислить, построить, придумать и т. д.);

5) определить степень сложности задачи (недостающие или лишние данные; количество математических идей, используемых при решении; способ построения математической модели; количество вопросов и т. д.) и продумать вопросы, на которые должны будут ответить учащиеся;

6) сформулировать условие задачи в доступной для учащихся форме.

Задание № 2. Решите составленную задачу и докажите, что она является компетентностной, т. е. удовлетворяет требованиям компетентностной задачи.

Задание № 3. Какими ещё способами, по вашему мнению, можно составить компетентностные задачи по стереометрии?

Группа 2

Задание № 1. Составьте межпредметную компетентностную задачу, для решения которой обязательно применяются знания по теме: «*Перпендикулярность прямых и плоскостей*», используя следующий план:

1) определить, чему мы хотим научить учащегося (выделить понятие, умение, формулу, способ и т. д.) в ходе решения задачи;

2) выбрать объект, с помощью которого будим изучать понятие, умение, способ, формулу и др.;

3) выявить взаимосвязи выделенного объекта (призма, плоскость, цилиндр, конус и т. д.) с другими предметами школьного курса (физикой, биологией, химией, географией и т. д.);

4) выбрать тему (или темы) из другого предмета с которой будут работать учащиеся при решении задачи;

5) учесть знания, имеющиеся у учащихся, как по математике, так и по выбранной теме из других предметов, и выбрать методы, с помощью которых предполагается решение задачи (найти, вычислить, построить, придумать и т. д.);

6) определить степень сложности задачи (недостающие или лишние данные; количество математических идей и межпредметных связей, используемых при решении; способ построения математической модели; количество вопросов и т. д.);

7) определить, какие дополнительные данные нужно будет использовать учащимся при решении, и продумать вопросы, на которые должны будут ответить учащиеся;

8) сформулировать условие задачи в доступной для учащихся форме.

Задание № 2. Решите составленную задачу и докажите, что она является компетентностной, т. е. удовлетворяет требованиям компетентностной задачи.

Задание № 3. Какими ещё способами, по вашему мнению, можно составить компетентностные задачи по стереометрии?

Группа 3

Задание № 1. Составьте практическую компетентностную задачу, для решения которой обязательно применяются знания по теме: «*Декартовы координаты и векторы в пространстве*», используя следующий план:

1) определить, чему мы хотим научить учащегося (выделить понятие, умение, формулу, способ и т. д.) в ходе решения задачи;

2) выбрать объект, с помощью которого будим изучать понятие, формулу, отрабатывать умение, способ и др.;

3) учитывая интересы и возраст учащихся, выявить взаимосвязи выделенного объекта (призма, плоскость, цилиндр, конус и т. д.) с реальными жизненными ситуациями и конкретными видами деятельности (строительство, медицина, реклама и др.);

4) выбрать тематику (опираясь на пункт 3), с которой будут работать учащиеся при решении задачи;

5) учесть знания, имеющиеся у учащихся, как по математике, так и по выбранной тематике, и выбрать методы, с помо-

щью которых предполагается решение задачи (найти, вычислить, построить, придумать и т. д.);

6) определить степень сложности задачи (недостающие или лишние данные; количество математических идей, используемых при решении; способ построения математической модели; количество вопросов и т. д.);

7) определить, какие дополнительные данные нужно будет использовать учащимся при решении задачи, и продумать вопросы, на которые должны будут ответить учащиеся;

8) сформулировать условие задачи в доступной для учащихся форме.

Задание № 2. Решите составленную задачу и докажите, что она является компетентностной, т. е. удовлетворяет требованиям компетентностной задачи.

Задание № 3. Какими ещё способами, по вашему мнению, можно составить компетентностные задачи по стереометрии?

Группа 4

Задание № 1. Составьте межпредметную или практическую компетентностную задачу, которую можно решить, применяя знания по теме: «*Многогранники*».

Задание № 2. Решите составленную задачу и докажите, что она является компетентностной, т. е. удовлетворяет требованиям компетентностной задачи.

Задание № 3. Опишите способ составления задачи. Какими ещё способами, по вашему мнению, можно составить компетентностные задачи, для решения которых будут использоваться знания стереометрии?

Занятие № 8

Тема: **«*Конструирование компетентностных задач по геометрии*»**

Задание № 1

Знание: Назовите основные особенности компетентностных задач по математике и основные этапы решения таких задач.

Понимание: Обрисуйте в общих чертах шаги, необходимые для того, чтобы решить компетентностную задачу. Покажите связи между стандартными математическими задачами и компетентностными задачами, основываясь на определении компетентностной задачи и её особенностях.

Применение: Представьте результаты работы в предыдущем пункте в виде схемы или таблицы, которые позволяют сделать сравнительный анализ стандартных и компетентностных математических задач.

Анализ: Сравните различные определения компетентностно-ориентированных задач (заданий). Что общего в этих определениях, и что различного? (Для выполнения этого задания предлагаются различные источники из списка литературы (1, 13, 18, 38, 49) или уже готовые определения).

Синтез: Изложите в форме доклада своё мнение (отношение, понимание) о компетентностных задачах по математике.

Оценка: Оцените значимость использования компетентностных задач на уроках математики в школе для формирования математической компетентности школьников.

Примеры определений разных авторов:

1) Компетентностными называют задачи, которые удовлетворяют следующим требованиям:

- «общекультурная и социальная значимость получаемого результата, это обеспечивает познавательную мотивацию учащегося;
- цель решения компетентностной задачи заключается не столько в получении ответа, сколько в присвоении нового знания (метода, способа решения, приёма), с возможным переносом на другие предметы;
- по структуре эти задачи — нестандартные, т. е. в структуре задачи обязательно неопределены некоторые из её компонентов;
- возможно наличие нескольких путей решения» [49].

2) Компетентностной называют задачу, в которой описывается реальная жизненная ситуация, решение которой подразумевает построение математической модели [38].

3) Компетентностно-ориентированные задачи направлены на организацию деятельности учащегося, а не воспроизведение им информации или отдельных действий [13].

Также, подобные задачи могут называться иначе, например, контекстными или ситуационными.

4) К контекстным задачам — относятся задачи, у которых контекст обеспечивает подлинные условия для использования математики при решении, оказывает влияние на решение и его интерпретацию. Не исключается использование задач, у которых условие является гипотетическим, если оно не слишком отдалено от реальной ситуации [18].

Принципы ситуационных задач:

– задание составляется на основе практической ситуации, которая по возможности, должна быть близка к ситуациям, знакомым учащимся и связанным, например, с личной жизнью (школьной, домашней, на отдыхе), с обучением (жизнью класса, школы) или общественной жизнью, профессией;

– ситуация должна обеспечивать возможность комплексной проверки знаний и умений, т. е. требовать использования знаний и умений из различных тем и разделов курса математики и из других учебных предметов (например, физики, географии, биологии, истории) или внешкольных источников информации;

– в рамках предложенной ситуации должна возникать такая проблема, которая делает подлинно необходимым использование математики для её разрешения;

– контекст задачи не должен явно подсказывать область знаний и метод решения, которые надо использовать для разрешения поставленной проблемы;

– условие задачи должно включать излишнюю информацию (текстовую и количественную), которая не является нужной для решения поставленной проблемы;

– контекст задачи должен быть представлен в различной форме (таблица, схема, диаграмма, график);

– математическая задача, составленная на основе предложенной реальной ситуации, по возможности должна иметь более одного решения.

5) Ситуационные задачи [1] понимаются авторами, как задачи, позволяющие ученику осваивать интеллектуальные операции последовательно в процессе работы с информацией: озна-

комление — понимание — применение — анализ — синтез — оценка.

Специфика ситуационной задачи заключается в том, что она носит ярко выраженный практико-ориентированный характер, но для её решения необходимо конкретное предметное знание. Для решения ситуационной задачи требуется знание нескольких учебных предметов. Кроме этого, такая задача имеет красивое название, отражающее её смысл. Обязательным элементом задачи является проблемный вопрос, который должен быть сформулирован таким образом, чтобы учащемуся захотелось найти на него ответ. Т. е. ситуационные задачи близки к проблемным задачам и направлены на выявление и осознание способа деятельности.

Задание № 2. Сконструировать компетентностную задачу, которая решается с использованием знаний стереометрии, и разработать фрагмент конспекта урока по решению данной задачи. (Данное задание может быть выполнено на занятии или быть задано на дом).

Занятие № 9, № 10

Тема: «***Представление фрагментов урока по решению компетентностных задач***»

Представить подготовленный на предыдущем занятии фрагмент урока по работе с компетентностной задачей (в форме проведения урока математики; в форме презентации и т. д.).

Итоговое занятие

Обсуждение выступлений, результатов, проблем (в форме «круглого стола» или мастерской). Подведение итогов работы в рамках разработанного курса. Составление банка компетентностных задач, которые были подобраны и сконструированы студентами на занятиях.

Список литературы для дополнительного изучения

1. Акулова О. В., Писарева С. А., Пискунова Е. В. Конструирование ситуационных задач для оценки компетентности учащихся: Учебно-методическое пособие для педагогов школ. СПб.: КАРО, 2008. 96 с.
2. Александров А. Д. Геометрия: Учеб. для учащихся 10 кл. с углубл. изуч. математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. 2-е изд. М.: Просвещение, 2003. 238 с.
3. Александров А. Д. и др. Геометрия: Учеб. для учащихся 11 кл. с углубл. изуч. математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. М.: Просвещение, 2000. 319 с.
4. Альтов Г. С. И тут появился изобретатель … / Ил. А. Шабельника; Обложка С. Сачкова. М.: Дет. лит., 2000. 160 с.
5. Башмаков М. И. Математика: Учеб. пособие для 10–11 кл. гуманит. профиля. М.: Просвещение, 2004. 336 с.
6. Белоненко Т. В., Васильев А. Е., Васильева Н. И., Крымская Л. Д. Сборник конкурсных задач по математике. СПб.: Специальная литература, 1997. 560 с.
7. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М., Наука, 1974. 576 с.
8. Варданян С. С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: Кн. для учащихся 6–8 кл. сред. шк. / Под ред. В. А. Гусева. М.: Просвещение, 1989. 144 с.
9. Вишнякова С. М. Профессиональное образование: Словарь. Ключевые понятия, термины, актуальная лексика. М. 1999. С.130–131.
10. Все задачи «Кенгуру» / Под. ред. А. И. Плоткина. СПб: Левша. 2003. 145 с.
11. Гайнулова Ф. Межпредметные связи на уроках математики // Учитель. 2007. № 4. С.11–13.
12. Геометрия: Учеб. для 10–11 кл. сред. шк. / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 3-е изд. М.: Просвещение, 1994. 207 с.
13. Голуб Г. Б., Перелыгина Е. А., Чуракова О. В. Метод проектов — технология компетентностно-ориентированного образования: Методическое пособие для педагогов — руководителей проектов учащихся основной школы / Под ред.

докт. физ.-мат. наук, проф. Е. Я. Когана. Самара: Издательство «Учебная литература», Издательский дом «Фёдоров», 2006. 224 с.
14. Груздев Н. В. Практика изучения возможностей применения компетентностного подхода в общеобразовательной школе // Академические чтения. СПб.: Издательство СПбГИПСР, 2005. Вып. 6: Компетентностный подход в современном образовании. С. 145–147.
15. Гусев В. А. и др. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1992. 352 с.
16. Далингер В. А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1991. 80 с.
17. Дахин А. Н. Компетенция и компетентность: сколько их у российского школьника? // Стандарты и мониторинг в образовании. 2004. № 2 (март — апрель) С. 42–47.
18. Денищева Л. О., Глазков Ю. А., Краснянская К. А. Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике // Математика в школе. 2008. № 6. С. 19–30.
19. Егупова М. Зачем измеряют диаметр дерева? // Математика в школе. 2008. № 5. С. 76.
20. Епишева О. Б., Крупич В. И. Учить школьников учиться математике: Формирование приёмов учеб. деятельности: кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 128 с.
21. Ермак Е. А. Развитие представлений старшеклассников о геометрической составляющей современной естественнонаучной картины мира. Учебно-методическое пособие. СПб. — Псков, 2002. 196 с.
22. Зеер Э., Сыманюк Э. Компетентностный подход к модернизации профессионального образования // Высшее образование в России. 2005. № 4. С. 23–29.
23. Зимняя И. А. Ключевые компетентности как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании. Авторская версия. М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. 38 с.

24. Иванова Т. В. Компетентностный подход к разработке стандартов для 11-летней школы: анализ, проблемы, вывод. // Стандарты и мониторинг в образовании. 2004. № 1 (январь — февраль). С. 16–20.
25. Илларионова Е. Практическая направленность уроков геометрии // Математика: приложение к газете «Первое сентября». 2007. № 20 (16–31 октября). С. 12–14.
26. Ковалёва Г. С. Сравнительный анализ качества математического и естественнонаучного образования в России (по материалам международного исследования — TIMSS). М., 1996.
27. Ковалёва Г. С., Красновский Э. А., Краснокутская Л. П., Краснянская К. А. Основные результаты PISA. 2000 // Школьные технологии. 2003. № 5. С. 85–96.
28. Кочетова Е. С. Сборник задач и упражнений по стереометрии. Пособие для учителя. Гос. учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР. М., 1956. 176 с.
29. Ложкина Е. М. Задания на конструирование текстовых задач как средство обучению математическому моделированию // [Электронный ресурс]: URL: ftp://lib.herzen.spb.ru/text/lozhkina_izv37_80_p447_450.pdf
30. Лоповок Л. М. Сборник задач по стереометрии. Пособие для учителя сред. школы. Гос. учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, М., 1959. 168 с.
31. Маркова А. К. Формирование мотивации учения в школьном возрасте. М.: Просвещение, 1983. 96 с.
32. Международная программа PISA 2000. Примеры заданий по чтению, математике и естествознанию.
33. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / Под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. М.: Дрофа, 2005. 416 с.
34. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчищина и др.; Под ред. В. А. Гусева. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 368 с.
35. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. М.: Просвещение, 1975. 462 с.

36. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. М.: Просвещение», 1977. 480 с.
37. Мордкович А. Г., Смирнова И. М. Математика. 10 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. М.: Мнемозина, 2004. 384 с.
38. Мочалова И. А., Семенко Е. А. Компетентностные задачи как элемент повышения мотивации к изучению математики при обобщающем повторении // Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «57 Герценовские чтения» / Под ред. В. В. Орлова. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2004. С. 67–72.
39. Основные результаты международного исследования качества математического и естественнонаучного образования TIMSS — 2003 // [Электронный ресурс]: URL: http://www.centeroko.ru /timss03/timss03_res.htm
40. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA-2000 (краткий отчёт). Ковалёва Г. С., Красновский Э. А., Краснокутская Л. П., Краснянская К. А. Центр ОКО ИОСО РАО, Москва, 2002.
41. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA-2003, Москва, 2004.
42. Островский А. И. 75 задач по элементарной математике – простых, но …. М., «Просвещение», 1966. 132 с.
43. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. сред. шк. 3-е изд. М.: Просвещение, 1992. 383 с.
44. Подходова Н. С., Ложкина Е. М. Введение в моделирование. Математические модели в естествознании (биология, химия, экология): Учебное пособие. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2009. 177 с.
45. Сластенин В. А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В. А. Сластенина. М.: Издательский центр «Академия», 2002. 576 с.
46. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 10–11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. М.: Мнемозина, 2003. 232 с.

47. Стефанова Н. Л. Компетентностный подход с точки зрения методики обучения математике // Проблемы теории и практики обучения математике. СПб., 2006. С. 25–32.
48. Стефанова Н. Л., Харитонова О. В. Математика (для гуманитарных направлений профессионального педагогического образования): Учебно-методический комплекс. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2009. 135 с.
49. Стефанова Н. Л., Харитонова О. В. Учебно-познавательная компетентность старшеклассников как новый результат обучения геометрии // Академические чтения. СПб.: Издательство СПбГИПСР, 2005. Вып. 6: Компетентностный подход в современном образовании. С. 163–165.
50. Хуторской А. В. Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения / А. В. Хуторской. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2003. 415 с.
51. Хуторской А. В. Практикум по дидактике и современным методам обучения / А. В. Хуторской. СПб.: Питер, 2004. 541 с.
52. Хуторской А. В. Современная дидактика: Учебник для вузов. СПб: Питер, 2001. 544 с.
53. Чистяков В. Д. Старинные задачи по элементарной математике, Изд. 3-е, испр., Минск, «Вышэйш. школа», 1978. 272 с.
54. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 10–11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. заведений. М.: Дрофа, 1999. 208 с.
55. Элементарная математика: Практикум по решению задач: Учебно-методический комплекс. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2009. 283 с.

Учебное издание

Павлова Лидия Васильевна

КОМПЕТЕНТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Технический редактор: Л. В. Павлова
Компьютерная верстка: Н. А. Васильева
Корректор: С. Н. Емельянова

Подписано в печать 19.11.2014. Формат 60х90/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. п. л. 5,25.
Тираж 50 экз. Заказ № 4983.

Адрес издательства:
Россия, 180000, г. Псков, ул. Л. Толстого, д. 4[а], корп. 3[а],
Издательство Псковского государственного университета