И. С. Астахова
В. К. Кошмак
А. В. Лисенков

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Псков
Псковский государственный университет
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Псковский государственный университет

И. С. Астахова
В. К. Кошмак
А. В. Лисенков

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Псковского государственного университета

Псков
Псковский государственный университет
2016

УДК 519.21
ББК 22.171
А91

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Псковского государственного университета

Рецензенты:
— В. Г. Дегтярев, д-р. техн. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения;
— В. Н. Мельник, канд. физ.-мат. наук, доцент, Псковский государственный университет.

Астахова, И. С., Кошмак, В. К., Лисенков, А. В.
А91 Теория вероятностей и математическая статистика : Учебно-методическое пособие. — Псков : Псковский государственный университет, 2016. — 40 с.
ISBN 978-5-91116-445-4

Пособие содержит 10 контрольных заданий по теории вероятностей и математической статистике. В каждом задании 20 различных вариантов одинакового уровня сложности. Контрольные задания сопровождаются методическими указаниями по их выполнению. В данном пособии приводятся краткие сведения по теории, пример решения задачи по данной теме, указана литература по теме для самостоятельного изучения. Приведенные примеры задач имеют экономическое содержание. Пособие включает требования государственного стандарта по теории вероятностей и математической статистике, программу курса, вопросы для самопроверки, таблицы функции Лапласа, критических точек распределения χ^2 и Стьюдента.

Учебное пособие адресовано студентам экономических специальностей вузов различных форм обучения. Контрольные задания пособия могут использоваться для составления контрольных работ и типовых расчетов по теории вероятностей и математической статистике.

УДК 519.21
ББК 22.171

ISBN 978-5-91116-445-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика продолжают цикл математических дисциплин, которые предлагаются студентам, изучающим экономику в высшей школе. В результате изучения курса должно сформироваться умение читать специальную литературу, понимать существующие и строить собственные вероятностные модели реальной действительности. Для этой цели в пособии собраны примеры задач с экономическим содержанием. Изучение дисциплины необходимо для понимания природы и количественного описания случайных процессов, которые сопровождают любую экономическую деятельность.

В предлагаемом пособии представлены десять контрольных заданий по основным темам, соответствующим стандарту по теории вероятностей и математической статистике. По каждому из десяти заданий предлагаются методические указания, которые включают теоретические выкладки и пример решения задачи. Приводятся ссылки на литературу и рекомендуются дополнительные задачи для самостоятельного изучения соответствующей темы. Приложения пособия содержат таблицы значений функции Лапласа, критических точек распределения χ^2 и Стьюдента.

Выполнение работы следует начинать с проработки методических указаний по теме данного задания. В соответствии с методическими указаниями необходимо изучить теорию и разобрать примеры решения задач. Затем выполнить задания своего варианта. При подготовке к экзамену, рекомендуется письменно ответить на вопросы для самопроверки.

1. ТРЕБОВАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ, ВЫБОР ВАРИАНТА

Контрольная работа может выполняться в письменном или печатном виде. Оформление работы должно соответствовать ГОСТ 7.32-81 «Отчет о научно-исследовательской работе». Титульный лист включает: название института, название кафедры, название контрольной работы, фамилию, имя, отчество и личный шифр студента. Задания могут выполняться с применением компьютера.

Номер варианта N определяется по двум последним цифрам nn Вашей зачетной книжки по правилу: $N = 20$, если $nn = 00$, $N = nn$, если $00 < nn \le 20$; $N = nn - 20$, если $20 < nn \le 40$; $N = nn - 40$, если $40 < nn \le 60$, и т. д. Например, если две последние цифры 36, то это 16-ый вариант, если 82, то 2-ой вариант.

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1
Классическое определение вероятности

1. Подбрасываются две игральные кости. Подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найдите вероятность события, состоящего в том, что на верхних гранях костей в сумме будет 9 очков.

2. В столе лежат 10 предметов. С целью отыскать два определенных, все предметы случайным образом вынимают, раскладывая в один ряд. Найдите вероятность того, что отыскиваемые предметы окажутся рядом.

3. В урне 4 красных и 6 голубых шаров, одинаковых по размерам и весу. Чему равна вероятность того, что 2 наудачу извлеченных шара из этой урны окажутся голубыми?

4. Подбрасываются две игральные кости, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найдите вероятность события, состоящего в том, что на верхних гранях костей в сумме будет не меньше 9 очков.

5. В цехе работают восемь мужчин и три женщины. По табельным номерам наугад отобраны семь человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных окажется ровно две женщины.

6. В урне 11 шаров, среди которых 3 белых. Три шара последовательно вынимают из урны. Какова вероятность извлечь все 3 белых шара подряд.

7. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Чему равна вероятность, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо.

8. Подбрасываются две игральные кости, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найдите вероятность события, состоящего в том, что на верхних гранях костей в сумме будет не больше 7 очков.

9. В урне 5 черных и 5 белых шаров, одинаковых по размерам и весу. Чему равна вероятность того, что из трех наудачу извлеченных шаров из этой урны ровно два окажутся черными?

10. Найдите вероятность того, что на карточку «Спортлото» 6 из 36 будет получен минимальный выигрыш (угадано 3 из 36).

11. Подбрасываются две игральные кости, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найдите вероятность события, состоящего в том, что на верхних гранях костей в сумме будет 10 очков.

12. В столе лежат 8 предметов. С целью отыскать два определенных, все предметы случайным образом вынимают, раскладывая в один ряд. Найдите вероятность того, что отыскиваемые предметы окажутся рядом.

13. В урне 6 красных и 4 голубых шаров, одинаковых по размерам и весу. Чему равна вероятность того, что 2 наудачу извлеченных шара из этой урны окажутся голубыми?

14. Подбрасываются две игральные кости, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найдите вероятность события, состоящего в том, что на верхних гранях костей в сумме будет не меньше 8 очков.

15. В цехе работают восемь мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наугад отобраны пять человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных окажется ровно две женщины.

16. В урне 10 шаров, среди которых 4 белых. Три шара последовательно вынимают из урны. Какова вероятность извлечь все 3 белых шара подряд.

17. Пятитомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Чему равна вероятность, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо.

18. Подбрасываются две игральные кости, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найдите вероятность события, состоящего в том, что на верхних гранях костей в сумме будет не больше 5 очков.

19. В урне 4 черных и 4 белых шаров, одинаковых по размерам и весу. Чему равна вероятность того, что из четырех наудачу извлеченных шаров из этой урны ровно два окажутся черными?

20. Найдите вероятность того, что на карточку «Спортлото» 6 из 36 будет получен средний выигрыш (угадано 4 номера из 36).

Задание 2
Геометрическая вероятность

Выручка предприятия с равной вероятностью принимает значения на отрезке [a; b]. Издержки предприятия независимо от выручки с равной вероятностью принимают значения на отрезке [c; d]. С какой вероятностью прибыль предприятия будет неотрицательной?

1. a = 20, b = 30, c = 10, d = 25.
2. a = 30, b = 40, c = 30, d = 35.
3. a = 20, b = 40, c = 15, d = 30.
4. a = 40, b = 70, c = 30, d = 50.
5. a = 10, b = 30, c = 5, d = 20.
6. a = 60, b = 100, c = 50, d = 70.
7. a =20, b = 30, c = 5, d = 25.
8. a = 10, b = 20, c = 10, d = 15.
9. a = 40, b = 80, c = 30, d = 50.
10. a = 20, b = 30, c = 10, d = 25.
11. a = 50, b = 60, c = 40, d = 55.
12. a = 30, b = 50, c = 30, d = 40.
13. a = 20, b = 50, c = 10, d = 30.
14. a = 20, b = 40, c = 15, d = 30.

15. a = 30, b = 40, c = 20, d = 35.

16. a = 60, b = 90, c = 50, d = 70.

17. a = 40, b = 60, c = 40, d = 50.

18. a = 50, b = 60, c = 40, d = 55.

19. a = 50, b = 80, c = 40, d = 60.

20. a = 80, b = 100, c = 70, d = 85.

Задание 3
Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Контроллер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9. Какова вероятность, что из двух проверенных изделий: а) оба будут стандартными; б) ровно одно будет стандартным; в) хотя бы одно будет стандартным.

2. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найдите вероятность, что из трех накладных: а) только две оформлены верно; б) хотя бы одна оформлена верно.

3. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найдите вероятность своевременного выполнения задания: а) ровно одним предприятием из трех; б) хотя бы одним предприятием.

4. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказов элементов равны 0,05 и 0,08 соответственно. Найдите вероятность: а) отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент; б) отказа ровно одного элемента из двух; в) отказа двух элементов.

5. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что устройство сработает при аварии, равны 0,9; 0,95; 0,85 соответственно. Найдите вероятность, что: а) при аварии сработает ровно два устройства; б) сработает хотя бы одно устройство.

6. Контроллер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,8. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий: а) оба будут стандартными; б) ровно одно будет стандартным; в) хотя бы одно будет стандартным.

7. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,75. Найдите вероятность того, что из трех накладных: а) только две оформлены верно; б) хотя бы одна оформлена верно.

8. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,6; 0,7; 0,9. Найдите вероятность своевременного выполнения задания: а) ровно одним предприятием из трех; б) хотя бы одним предприятием.

9. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказов элементов равны 0,15 и 0,1 соответственно. Найдите вероятность: а) отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент; б) отказа ровно одного элемента из двух; в) отказа двух элементов.

10. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что устройство сработает при аварии, равны 0,8; 0,7; 0,6 соответственно. Найдите вероятность, что: а) при аварии сработает ровно два устройства; б) сработает хотя бы одно устройство.

11. Контроллер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,8. Какова вероятность, что из двух проверенных изделий: а) оба будут стандартными; б) ровно одно будет стандартным; в) хотя бы одно будет стандартным.

12. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найдите вероятность того, что из трех накладных: а) только две оформлены верно; б) хотя бы одна оформлена верно.

13. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,7; 0,6; 0,5. Найдите вероятность своевременного выполнения задания: а) ровно одним предприятием из трех; б) хотя бы одним предприятием.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказов элементов равны 0,04 и 0,02 соответственно. Найдите вероятность: а) отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент; б) отказа ровно одного элемента из двух; в) отказа двух элементов.

15. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что устройство сработает при аварии, равны 0,8; 0,9; 0,7 соответственно. Найдите вероятность, что: а) при аварии сработает ровно два устройства; б) сработает хотя бы одно устройство.

16. Контроллер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,95. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий: а) оба будут стандартными; б) ровно одно будет стандартным; в) хотя бы одно будет стандартным.

17. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найдите вероятность того, что из трех накладных: а) только две оформлены верно; б) хотя бы одна оформлена верно.

18. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,8; 0,9; 0,7. Найдите вероятность своевременного выполнения задания: а) ровно одним предприятием из трех; б) хотя бы одним предприятием.

19. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказов элементов равны 0,1 и 0,2 соответственно. Найдите вероятность: а) отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент; б) отказа ровно одного элемента из двух; в) отказа двух элементов.

20. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что устройство сработает при аварии, равны 0,5; 0,4; 0,6 соответственно. Найдите вероятность, что: а) при аварии сработает ровно два устройства; б) сработает хотя бы одно устройство.

Задание 4
Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 45 %, второй — 30 % и третьей — 25 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 1 %, для второй — 2 %, для третьей — 8 %. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

2. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,2 % брака, второй — 0,3 % и третий — 0,4 %. С первого автомата поступило 500, со второго — 1000 и с третьего — 1500 деталей. Найдите вероятность: а) попадания на сборку бракованной детали; б) что попавшая бракованная деталь изготовлена третьим автоматом.

3. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10 %, на втором — 30 %, на третьем — 60 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 — если на втором станке, и 0,9 — если на третьем станке. Найдите вероятность, что: а) наугад взятая деталь окажется бездефектной; б) наугад выбранная бездефектная деталь изготовлена на втором станке.

4. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20 %, второй — 50 % и третьей — 30 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 1 %, для второй — 4 %, для третьей — 2 %. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на второй фабрике.

5. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 1 % брака, второй — 1,5% и третий — 0,5%. С первого автомата поступило 1000, со второго — 2500 и с третьего — 1500 деталей. Найдите вероятность: а) попадания на сборку бракованной детали; б) что попавшая бракованная деталь изготовлена вторым автоматом.

6. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 45 %, на втором — 15 %, на третьем — 40 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,95, если она изготовлена на первом станке, 0,85 — если на втором станке, и 0,9 — если на третьем станке. Найдите вероятность, что: а) наугад взятая деталь окажется бездефектной; б) наугад выбранная бездефектная деталь изготовлена на первом станке.

7. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 25 %, второй — 40 % и третьей — 35 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 0,5 %, для второй — 0,8 %, для третьей — 0,2%. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на третьей фабрике.

8. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 1 % брака, второй — 2 % и третий — 0,5 %. С первого автомата поступило 1000, со второго — 1500 и с третьего — 500 деталей. Найдите вероятность: а) попадания на сборку бракованной детали; б) что попавшая бракованная деталь изготовлена вторым автоматом.

9. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 25 %, на втором — 35 %, на третьем — 40 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,99, если она изготовлена на первом станке, 0,95 — если на втором станке, и 0,9 — если на третьем станке. Найдите вероятность, что: а) наугад взятая деталь окажется бездефектной; б) наугад выбранная бездефектная деталь изготовлена на третьем станке.

10. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 40 %, второй — 25 % и третьей — 35 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 0,5 %, для второй — 0,2 %, для третьей — 0,8 %. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

11. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 40 %, второй — 25 % и третьей — 35 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 1%, для второй — 2 %, для третьей — 2 %. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

12. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1 % брака, второй — 0,2 % и третий — 0,3%. С первого автомата поступило 1500, со второго — 1000 и с третьего — 500 деталей. Найдите вероятность: а) попадания на сборку бракованной детали; б) что попавшая бракованная деталь изготовлена третьим автоматом.

13. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 50 %, на втором — 30 %, на третьем — 20 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 — если на втором станке, и 0,9 — если на третьем станке. Найдите вероятность, что: а) наугад взятая деталь окажется бездефектной; б) наугад выбранная бездефектная деталь изготовлена на втором станке.

14. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20 %, второй — 45 % и третьей — 35 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 1 %, для второй — 2 %, для третьей — 3 %. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на второй фабрике.

15. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 1 % брака, второй — 2 % и третий — 1,5 %. С первого автомата поступило 1500, со второго — 2000 и с третьего — 1500 деталей. Найдите вероятность: а) попадания на сборку бракованной детали; б) что попавшая бракованная деталь изготовлена вторым автоматом.

16. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 55 %, на втором — 25 %, на третьем — 20 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,9, если она изготовлена на первом станке, 0,85 — если на втором станке, и 0,7 — если на третьем станке. Найдите вероятность, что: а) наугад взятая деталь окажется бездефектной; б) наугад выбранная бездефектная деталь изготовлена на первом станке.

17. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 25 %, второй — 45 % и третьей — 30 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 0,5 %, для второй — 0,3 %, для третьей — 0,2 %. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на третьей фабрике.

18. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 1 % брака, второй — 1,5 % и третий — 0,5 %. С первого автомата поступило 1500, со второго — 1000 и с третьего — 500 деталей. Найдите вероятность: а) попадания на сборку бракованной детали; б) что попавшая бракованная деталь изготовлена вторым автоматом.

19. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 25 %, на втором — 45 %, на третьем — 30 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,9, если она изготовлена на первом станке, 0,75 — если на втором станке, и 0,8 — если на третьем станке. Найдите вероятность, что: а) наугад взятая деталь окажется бездефектной; б) наугад выбранная бездефектная деталь изготовлена на третьем станке.

20. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 30 %, второй — 45 % и третьей — 25 %. Известно, что средний процент бракованных изделий для первой фабрики равен 0,5 %, для второй — 0,2 %, для третьей — 0,8%. Найдите вероятность: а) выбрать бракованное изделие; б) что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Задание 5
Дискретные случайные величины

Дискретные случайные величины X_1и X_2 имеют биномиальное и пуассоновское распределение соответственно. Известны математические ожидания каждой из величин: $M[X_1] = M[X_2] = a$, и дисперсия величины X_1: $D[X_1] = b$. Для каждой из величин найдите вероятность, что она попадет в отрезок $[\alpha; \beta]$.

1. $a = 2, b = 3/2, \alpha = 1, \beta = 3.$
2. $a = 3, b = 3/2, \alpha = 2, \beta = 4.$
3. $a = 4, b = 2, \alpha = 3, \beta = 5.$
4. $a = 2, b = 4/3, \alpha = 2, \beta = 4.$
5. $a = 4, b = 4/3, \alpha = 3, \beta = 5.$
6. $a = 6, b = 3/2, \alpha = 3, \beta = 5.$
7. $a = 2, b = 3/2, \alpha = 3, \beta = 5.$
8. $a = 3, b = 3/2, \alpha = 1, \beta = 3.$
9. $a = 4, b = 2, \alpha = 5, \beta = 7.$
10. $a = 2, b = 4/3, \alpha = 4, \beta = 6.$
11. $a = 2, b = 1/2, \alpha = 1, \beta = 3.$
12. $a = 3, b = 3/2, \alpha = 3, \beta = 5.$
13. $a = 4, b = 2, \alpha = 2, \beta = 4.$
14. $a = 2, b = 4/3, \alpha = 1, \beta = 3.$
15. $a = 4, b = 4/3, \alpha = 1, \beta = 3.$
16. $a = 6, b = 3/2, \alpha = 1, \beta = 3.$
17. $a = 2, b = 3/2, \alpha = 2, \beta = 4.$
18. $a = 3, b = 3/2, \alpha = 2, \beta = 4.$
19. $a = 4, b = 2, \alpha = 2, \beta = 4.$
20. $a = 2, b = 4/3, \alpha = 2, \beta = 4.$

Задание 6
Непрерывные случайные величины

Непрерывные случайные величины X_1и X_2 имеют равномерное и нормальное распределение соответственно. Известны математические ожидания каждой из величин: $M[X_1] = M[X_2] = a$, и их среднеквадратические отклонения: $\sigma[X_1] = \sigma[X_2] = \sigma$. Для каждой из величин найдите вероятность, что она попадет в отрезок $[\alpha; \beta]$.

1. $a = 2, \sigma = 1, \alpha = 0, \beta = 2.$
2. $a = 3, \sigma = 2, \alpha = 3, \beta = 6.$
3. $a = 4, \sigma = 1, \alpha = 0, \beta = 5.$
4. $a = 5, \sigma = 2, \alpha = 2, \beta = 4.$

5. $a = 6, \sigma = 1, \alpha = 1, \beta = 5.$
6. $a = 2, \sigma = 2, \alpha = 3, \beta = 7.$
7. $a = 3, \sigma = 1, \alpha = 3, \beta = 5.$
8. $a = 4, \sigma = 2, \alpha = 0, \beta = 3.$
9. $a = 5, \sigma = 1, \alpha = 3, \beta = 7.$
10. $a = 6, \sigma = 2, \alpha = 4, \beta = 8.$
11. $a = 4, \sigma = 1, \alpha = 2, \beta = 5.$
12. $a = 5, \sigma = 2, \alpha = 5, \beta = 8.$
13. $a = 1, \sigma = 1, \alpha = 0, \beta = 3.$
14. $a = 2, \sigma = 2, \alpha = 1, \beta = 5.$
15. $a = 7, \sigma = 2, \alpha = 4, \beta = 7.$
16. $a = 8, \sigma = 2, \alpha = 5, \beta = 9.$
17. $a = 8, \sigma = 1, \alpha = 4, \beta = 7.$
18. $a = 6, \sigma = 2, \alpha = 0, \beta = 5.$
19. $a = 9, \sigma = 1, \alpha = 8, \beta = 11.$
20. $a = 9, \sigma = 2, \alpha = 6, \beta = 9.$

Задание 7
Функция распределения случайной величины

Случайная величина X задана своей функцией распределения F(x). Найдите плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины. Определите вероятность попадания в отрезок [a; b]:

1. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$
$a = -1, \ b = 0{,}5.$

2. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ (x^2 - x)/2, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$
$a = 1{,}5, \ b = 3.$

3. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^3, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$
$a = -2, \ b = 0{,}5.$

4. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \le 1/3 \\ 1, & x > 1/3 \end{cases}$$
$a = 0{,}25, \ b = 2.$

5. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ x/2 - 1, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$
$a = 0, \ b = 3.$

6. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/9, & 0 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$
$a = 0, \ b = 2.$

7. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/4, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$
$a = 1, \ b = 3.$

8. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2 \\ \cos x, & -\pi/2 < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$
$a = -\dfrac{\pi}{4}, \ b = \pi.$

9. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2\sin x, & 0 < x \le \pi/6 \\ 1, & x > \pi/6 \end{cases}$$
$a = -\pi, \ b = \pi/8.$

10. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3\pi/4 \\ \cos 2x, & 3\pi/4 < x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$
$a = 0, \ b = 5\pi/6.$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=0{,}5\quad b=2{,}5.$

12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ (x^2-x)/2, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=-1{,}5,\quad b=1{,}5.$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$a=0{,}5\quad b=2{,}5.$

14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 3x^2+2x, & 0<x\le 1/3\\ 1, & x>1/3\end{cases}$

$a=-0{,}5,\quad b=0{,}25.$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-1, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=0,\quad b=1{,}5.$

16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/9, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a=-4,\quad b=1.$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/4, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=-1,\quad b=1{,}5.$

18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\pi/2\\ \cos x, & -\pi/2<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$a=-\dfrac{3\pi}{4},\quad b=-\dfrac{\pi}{3}.$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/6\end{cases}$

$a=-\pi,\quad b=\pi/4.$

20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4\\ \cos 2x, & 3\pi/4<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$

$a=-\pi,\quad b=5\pi/6.$

Задание 8
Числовые характеристики случайных величин

Определите и постройте функцию распределения и плотность вероятности прибыли предприятия (задание 2). Вычислите коэффициент вариации прибыли предприятия.

Задание 9
Распределение функции от случайной величины

Цена на продукцию предприятия P равномерно распределена на интервале (a;b). Спрос на продукцию предприятия Q = A+B·P. Найдите плотность вероятности выручки R = P·Q предприятия.

1. a = 1, b = 6, A = 10, B = –1.
2. a = 2, b = 6, A = 20, B = –2.
3. a = 2, b = 3, A = 30, B = –3.
4. a = 2, b = 4, A = 40, B = –4.
5. a = 2, b = 5, A = 50, B = –5.
6. a = 2, b = 6, A = 60, B = –6.
7. a = 2, b = 7, A = 70, B = –7.
8. a = 2, b = 8, A = 80, B = –8.
9. a = 2, b = 9, A = 90, B = –9.
10. a = 3, b = 7, A = 100, B = –10.
11. a = 4, b = 6, A = 10, B = –1.
12. a = 5, b = 2, A = 20, B = –2.
13. a = 3, b = 7, A = 30, B = –3.
14. a = 2, b = 2, A = 40, B = –4.
15. a = 2, b = 7, A = 50, B = –5.
16. a = 3, b = 6, A = 60, B = –6.
17. a = 3, b = 7, A = 70, B = –7.
18. a = 3, b = 8, A = 80, B = –8.
19. a = 3, b = 9, A = 90, B = –9.
20. a = 4, b = 8, A = 100, B = –10.

Задание 10
Математическая статистика

В таблице представлены наблюдения случайной величины X. Для данных наблюдений:

1) Определите выборочное распределение случайной величины X и постройте многоугольник ее распределения;

2) Получите оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X. Определите для них 95 % доверительные интервалы;

3) Считая, что случайная величина X подчиняется биномиальному распределению (число опытов определяется наибольшим значением X) рассчитайте ее теоретическое распределение и постройте многоугольник ее теоретического распределения;

4) По критерию Пирсона с уровнем значимости 0,05 проверьте гипотезу о биномиальном распределении случайной величины X.

№	Варианты																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	2	0	3	4	3	3	1	2	1	3	4	1	1	3	2	3	1	1	4	3
2	1	3	2	2	2	3	1	3	4	1	2	4	3	3	4	3	1	3	4	2
3	2	2	3	4	3	3	3	3	4	2	4	3	4	3	2	2	3	3	2	2
4	4	1	1	2	3	5	3	4	3	3	2	3	1	3	1	1	0	0	5	2
5	5	2	0	2	1	3	1	2	4	3	5	1	2	2	3	4	2	3	3	3
6	4	4	2	3	3	4	1	0	4	3	4	2	0	4	2	1	1	3	3	1
7	2	3	2	3	2	5	2	2	2	0	1	2	3	2	4	3	2	4	5	2
8	4	2	2	2	3	4	3	2	3	2	3	2	3	5	2	3	2	3	1	3
9	3	2	1	5	2	3	2	3	4	3	4	2	2	3	4	3	1	1	3	3
10	4	3	3	4	1	2	1	4	4	1	4	2	3	5	3	2	2	3	4	2
11	3	3	2	3	3	4	3	3	2	1	4	3	3	3	3	5	1	2	5	2
12	3	3	3	4	0	2	2	3	4	3	5	1	4	1	2	4	4	3	3	1
13	4	1	2	3	2	2	1	3	4	4	3	2	2	5	2	3	3	1	3	2
14	3	1	2	5	3	2	2	2	4	1	2	0	1	3	2	3	1	4	4	2
15	1	3	2	2	3	3	2	3	2	0	2	2	3	5	4	4	3	2	6	2
16	3	2	3	4	2	4	2	1	3	3	3	2	3	4	3	3	2	2	5	4
17	3	3	1	4	2	3	3	2	3	1	2	2	2	6	3	3	3	2	3	2
18	0	4	1	5	3	4	2	3	5	2	3	3	4	3	2	2	2	3	6	2
19	3	2	0	3	2	3	1	3	3	3	4	1	3	3	2	3	2	2	3	2

20	4	3	3	3	0	4	2	2	4	3	4	0	2	4	3	4	3	3	5	3
21	3	3	1	5	2	3	3	4	5	1	3	1	3	4	3	5	1	3	1	3
22	3	2	1	3	2	2	2	2	3	3	3	0	2	2	3	3	2	1	4	2
23	1	0	3	5	3	2	2	3	3	3	2	4	4	4	4	4	0	3	3	3
24	3	2	4	3	2	2	3	4	1	3	1	3	2	4	2	0	2	4	3	1
25	3	1	1	6	3	2	4	3	5	3	2	1	4	3	1	3	2	3	5	2
26	3	3	3	2	0	3	0	1	4	3	0	2	3	4	1	5	3	2	4	2
27	2	2	1	5	2	2	2	3	5	4	4	2	2	5	3	4	2	2	3	3
28	2	2	4	2	2	3	2	3	4	4	3	4	2	3	4	1	2	3	5	3
29	2	3	2	5	4	2	2	3	3	2	0	3	2	4	2	2	3	3	3	4
30	2	3	2	5	2	2	1	2	3	3	3	1	3	5	3	5	1	2	2	3
31	1	2	4	3	2	2	2	2	2	3	2	1	2	2	2	2	3	3	5	3
32	1	4	2	6	2	4	3	2	5	3	5	2	2	4	3	2	4	2	3	0
33	4	3	4	2	2	2	2	4	2	2	4	2	3	4	2	2	3	1	3	1
34	2	3	2	4	2	4	3	3	3	3	2	2	1	3	4	2	0	3	1	3
35	4	3	3	4	2	5	3	2	5	4	3	1	3	3	2	3	2	3	4	3
36	2	2	2	5	4	3	2	1	4	3	0	1	2	4	1	2	3	3	5	1
37	3	2	3	2	2	2	2	3	3	2	5	2	3	5	3	3	4	4	3	2
38	2	2	2	5	2	3	3	0	3	3	4	2	2	4	1	2	3	1	5	1
39	2	2	4	4	1	3	0	3	6	3	3	4	2	4	2	2	2	3	5	2
40	3	0	3	4	3	2	2	2	3	3	4	2	2	3	3	3	1	4	2	4
41	2	2	1	5	4	3	3	1	5	2	1	1	2	5	0	3	2	1	4	2
42	3	2	3	1	4	3	3	3	3	4	4	3	3	5	3	3	2	1	4	1
43	4	2	2	5	4	2	3	3	3	3	2	3	3	5	3	4	2	2	2	3
44	1	3	2	3	3	2	1	1	5	2	2	1	2	2	1	4	0	2	5	2
45	1	0	1	3	3	3	2	2	3	3	3	2	3	3	4	1	2	2	4	4
46	5	2	3	4	2	4	2	3	5	1	3	3	2	4	3	3	3	3	2	2
47	1	1	2	5	2	5	1	3	6	1	3	0	2	6	1	2	1	3	3	2
48	2	2	2	3	2	4	1	1	4	2	3	3	3	5	2	2	1	3	1	2
49	4	3	1	3	3	3	2	3	5	2	4	1	2	3	3	3	2	4	5	2
50	3	3	1	4	4	2	1	3	5	1	3	2	3	3	2	2	4	3	3	2

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1. Классическое определение вероятности

Пусть производится опыт. В результате опыта возможны с одинаковой вероятностью n элементарных событий. Если событию A соответствуют m элементарных событий, тогда вероятность, что произойдет событие A равна

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для решения задач на классическое определение вероятности применяют формулы комбинаторного анализа. Наиболее широко распространены формулы для числа:

размещений с повторениями $\overline{A}_n^m = n^m$;

размещений (без повторений) $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$;

перестановок $P_m = m!$;

сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$,

где $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$, читается n факториал, $0! = 1$.

Пример. Из колоды 36 хорошо перемешанных карт достают три карты. Какова вероятность, что это а) последовательно дама, семерка, туз; б) дама, семерка, туз в любой последовательности.

Решение.

а) Достать первую карту можно 36 способами, вторую — 35, третью 34 способами. Всего элементарных событий

$$n = 36\cdot 35\cdot 34 = 42840.$$

Событию A — последовательно появляются дама, семерка, туз соответствуют 4 дамы, 4 семерки и 4 туза всего

$$m = 4\cdot 4\cdot 4 = 64.$$

элементарных события.

Вероятность, что произойдет событие A равна

$$P(A) = \frac{64}{42840} = 0{,}0015;$$

б) Дама, семерка, туз в любой последовательности означает $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ несовместных событий

B_1 дама, семерка, туз;

B_2 дама, туз, семерка;

B_3 семерка, дама, туз;

B_4 семерка, туз, дама;

B_5 туз, дама, семерка;

B_6 туз, семерка, дама.

Событие B — дама, семерка, туз в любой последовательности равно объединению данных попарно несовместных шести событий:

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 .$$

Вероятность события В равна

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6} B_i\right) = \sum_{i=1}^{6} P(B_i) = 6 \cdot P(A) = 6 \cdot \frac{64}{42840} = 0{,}0090 .$$

Подробнее начала вероятности можно изучить по [1] гл.1 §§ 1–7 и [4] 1.1–2.1. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 1–9, [3] 806–810.

3.2. Геометрическая вероятность

Если элементы пространства элементарных событий Ω несчетны, события, имеющие одинаковую меру на Ω, равновероятны, тогда вероятность, что произойдет событие А, равна:

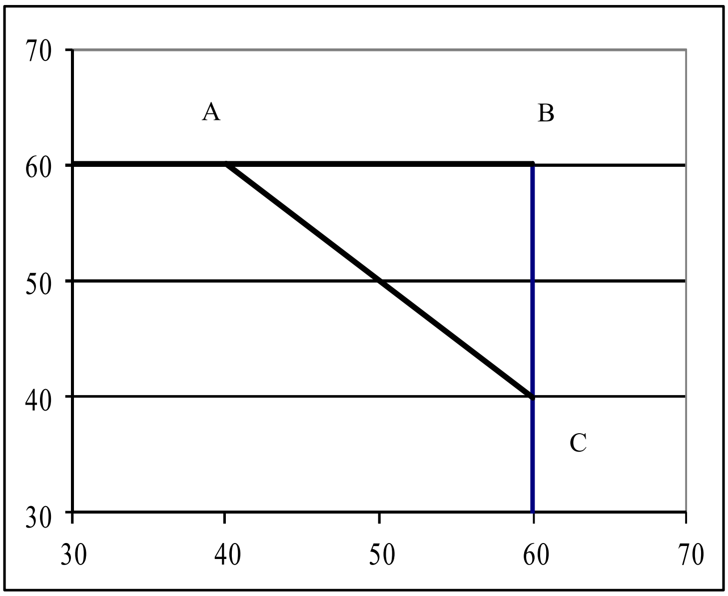
$$P(A) = \frac{meg(A)}{meg(\Omega)},$$

где meg(A) — мера множества A; meg(Ω) — мера множества Ω.

Пример. Выручка за день с равной вероятностью принимает значения от 30 до 60 руб. Найти вероятность, что за два дня выручка будет не меньше 100 руб. Предполагается независимость торговых дней.

Решение. Обозначим выручку в первый день через X, а во второй через Y. Выручка за два дня равна X+Y. Требуется найти вероятность, что $X + Y \ge 100$. Пространство элементарных событий представлено на рисунке и представляет собой квадрат 30x30. Площадь квадрата $meg(\Omega) = 30 \cdot 30 = 900$. Событию $X + Y \ge 100$ соответствует треугольник ABC. Его площадь $meg(A) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200$. Вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{200}{900} = \frac{2}{9} .$$



Подробнее геометрическую вероятность можно изучить по [1] гл. 1 § 8. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 26–28, 35, [3] 818.

3.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вероятность, что событие A не произойдет

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Вероятность, что в результате опыта произойдут событие A или событие B или события A и B одновременно равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Вероятность, что событие A произойдет при условии, что произошло событие B равна

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Отсюда следует

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

и

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B).$$

Пример. Покупатель может купить в магазине: чай с вероятностью 0,3; конфеты с вероятностью 0,6. Если покупается чай, то конфеты покупаются с вероятностью 0,2. Найти вероятность, что покупатель купит хотя бы один товар.

Решение. Обозначим: событие A — покупатель купил чай; событие B — покупатель купил конфеты. Искомая вероятность равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A) = P(A) + P(B) - P(B \mid A)P(A) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}84$$

Подробнее теорему сложения, условную вероятность и теорему умножения можно изучить по [1] гл.2 §1, гл.3 §1 и [4] 2.2–2.4. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 46, 49, 56, [3] 822.

3.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие A пересекается с полной группой попарно несовместных событий (их называют гипотезами) H_1, H_2,…, H_n, тогда вероятность, что событие A произойдет равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P(H_i).$$

Вероятность, что подтвердится i-тая гипотеза, при условии, что произошло событие A равна

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{P(A)}.$$

Пример. Банк выдает потребительские кредиты клиентам, причем 5 % кредитов не возвращаются. Решение о выдаче кредита принимается на основе оценки его платежеспособности. Система оценки платежеспособности клиента в 90 % случаев принимает верное решение (клиент вернет кредит и система устанавливает, что клиент платежеспособен) и ошибается в 15 % случаев (клиент не вернет кредит, а система устанавливает, что клиент платежеспособен). Клиенту выдали кредит. Определите вероятность, что он его не вернет. С какой вероятностью банк не выдаст кредит добросовестному заемщику?

Решение 1. Обозначим гипотезы: H — клиент вернет кредит; $\overline{H}$ — клиент не вернет кредит. Определим события: A — клиенту выдали кредит; $\overline{A}$ — клиенту не выдали кредит. По условию задачи $P(A\,|\,H) = 0{,}9;\ P(A\,|\,\overline{H}) = 0{,}15$. По формуле полной вероятности определим вероятность, что клиенту выдали кредит:

$$P(A) = P(A\,|\,H)P(H) + P(A\,|\,\overline{H})P(\overline{H}) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot 0{,}05 = 0{,}8625.$$

Искомая вероятность, что не платежеспособному клиенту выдали кредит, равна

$$P(\overline{H}\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,\overline{H})P(\overline{H})}{P(A)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}05}{0{,}8625} = 0{,}0087.$$

Вероятность, что кредит не будет выдан добросовестному заемщику равна

$$P(H\,|\,\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\,|\,H)P(H)}{P(\overline{A})} = \frac{(1 - P(A\,|\,H))P(H)}{1 - P(A)} = \frac{(1 - 0{,}9) \cdot 0{,}95}{1 - 0{,}8625} = 0{,}6909.$$

Таким образом, большая часть отказов в кредите (около 70 %) ложится на добросовестных заемщиков.

Решение 2. Рассчитаем матрицу распределения, соответствующую данной задаче. По условию задачи 5 % кредитов не возвращаются ($P(\overline{H}) = 0{,}05$) и 5 % кредитов возвращаются ($P(H) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$).

Матрица распределения			
	H	$\overline{H}$	Σ
A	0,855	0,0075	0,8625
$\overline{A}$	0,095	0,0425	0,1375
Σ	0,95	0,05	1

Система оценки платежеспособности клиента в 90 % случаев принимает верное решение:

$$P(A\,|\,H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = 0{,}9.$$

Находим

$$P(A \cap H) = P(A\,|\,H) \cdot P(H) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}855$$

Система ошибается в 15 % случаев:

$$P(A\,|\,\overline{H}) = \frac{P(A \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = 0{,}15.$$

Находим

$$P(A \cap \overline{H}) = P(A\,|\,\overline{H}) \cdot P(\overline{H}) = 0{,}15 \cdot 0{,}05 = 0{,}0075.$$

Находим вероятность, что кредит выдадут:

$$P(A) = 0{,}855 + 0{,}0075 = 0{,}8625$$

и заполняем первую строку таблицы. Вторую строку заполним, вычитая из третьей строки первую. С помощью построенной таблицы найдем вероятность, что кредит не будет выдан добросовестному заемщику равна

$$P(H\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap H)}{P(\overline{A})}==\frac{0{,}095}{0{,}1375}=0{,}6909\,.$$

Подробнее материал по формуле полной вероятности и формуле Байеса можно изучить по [1] гл. 4 § 2, 3 и [4] 2.5, 2.6. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 89–94, 97–106, [3] 855, 856.

3.5. Дискретные случайные величины

Дискретной называется случайная величина, принимающая счетное множество значений. Распределения вероятностей некоторых дискретных случайных величин:

гипергеометрическое	$P_{n,m,n_1}(m_1)=\dfrac{C_m^{m_1}C_{n-m}^{n_1-m_1}}{C_n^m}$
биномиальное	$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$
геометрическое	$P(n)=q^{n-1}p$
Пуассона	$P(m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$.

Пример. Товар, выставленный на продажу, приобретают в среднем за три торговых дня. Найдите вероятность, что товар будет продаваться больше 3-х рабочих дней, если вероятность его продажи за день постоянна.

Решение. Определим случайную величину X — число дней продажи товара. При постоянной вероятности продажи товара за день и независимости торговых дней случайная величина X подчиняется геометрическому распределению. Среднее число дней продажи или математическое ожидание случайной величины X равно:

$$M[X]=\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}p=p\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\int q^{n-1}dq\right)'=p\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{q^n}{n}\right)'=p\left(q\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=$$
$$=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p},$$

где p — вероятность продажи товара за день; q = 1 – p — вероятность, что товар не будет продан. По условию задачи M[X] = 3 = 1/p. Находим вероятность продажи товара за день p = 1/3. Вероятность, что товар будет продаваться больше 3 рабочих дней

$$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-P(1)-P(2)-P(3)=1-p-qp-q^2p=$$
$$=1-p(1+q+q^2)=1-p\frac{1-q^3}{1-q}=1-p\frac{1-q^3}{p}=q^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\approx 0{,}296.$$

Этот же результат можно было получить с помощью биномиального распределения. Товар будет продаваться больше 3-х рабочих дней означает, что 3 дня (3 опыта по схеме Бернулли) и 3 раза неуспех (товар не удалось продать). Вероятность данного события равна

$$P_3(0)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{3!}{0!\cdot 3!}\cdot\frac{8}{27}=\frac{8}{27}.$$

Подробнее материал по дискретным случайным величинам, а также их распределениям можно изучить по [1] гл. 6 § 1–8 и [4] 5.1–5.4. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 213, 215, 218 [3] 891, 892.

3.6. Непрерывные случайные величины

Функцией распределения случайной величины F(x)=P(X<x). Случайная величина, имеющая непрерывную функцию распределения, называется непрерывной. Плотности вероятности некоторых непрерывных случайных величин:

равномерное $f(x)=\frac{1}{b-a},\ x\in[a;b]$

показательное $f(x)=\alpha e^{-\alpha x},\ x\in[0;+\infty),\ \alpha\in(0;+\infty)$

нормальное $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x,a\in(-\infty,+\infty),\ \sigma\in(0,+\infty)$.

Пример. Среднее время обслуживания покупателя 3 мин. Найдите вероятность, что покупатель будет обслуживаться больше 3 мин, если время обслуживания подчиняется показательному распределению.

Решение. Определим случайную величину X — время обслуживания покупателя. Математическое ожидание этой случайной величины равно

$$M[X]=\int_0^\infty x\alpha e^{-\alpha x}dx\left|\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{\text{по частям}}\\ u=x & du=dx\\ dv=\alpha e^{-\alpha x}dx & v=-e^{-\alpha x}\end{array}\right|=-xe^{-\alpha x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\alpha}.$$

По условию задачи среднее время обслуживания M[X] = 3 = 1/α. Находим α = 1/3. Вероятность, что покупатель будет обслуживаться больше 3 минут равна

$$P(X>3)=\int_3^\infty\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx=-e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_3^\infty=e^{-1}=0{,}368.$$

Подробнее материал по непрерывным случайным величинам, а также их распределениям можно изучить по [1] гл. 11 § 1–6, гл. 12 §1–5, гл. 13 § 1–3 и [4] 6.1–6.3. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 307, 308, 322–324, 328, 331 [3] 904.

3.7. Функция распределения случайной величины

Случайной величиной X называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω. Функцией распределения случайной величины называется вероятность, что случайная величина X примет значение меньше x:

$$F(x)=P(X<x).$$

Плотностью вероятности случайной величины называется производная от функции распределения

$$f(x) = F'(x).$$

Математическое ожидание случайной величины с плотностью вероятности f(x) равно

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсия случайной величины равна

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2] - M^2[X].$$

Вероятность

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Пример. Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin(2x), & 0 \le x < 0{,}5. \\ 1, & x \ge 0{,}5 \end{cases}$$

Необходимо найти плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины. Также требуется определить вероятность попадания в отрезок [0,25; 1].

Решение. Плотность вероятности равна производной от функции распределения. Вычисляя производную, находим:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}, & 0 \le x < 0{,}5 \\ 0, & x \ge 0{,}5. \end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины равно

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

В поставленной задаче интегрируется кусочно-гладкая функция. Пределы интегрирования сужаются до интервала, в котором плотность вероятности не равна нулю. Кроме этого, в левой окрестности точки 0,5, плотность вероятности $f(x) \to \infty$, поэтому интеграл вычисляется как несобственный второго рода. Находим:

$$M[X] = \int_0^{0,5} \frac{4x}{\pi\sqrt{1-4x^2}} dx = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{0,5-\varepsilon}(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-4x^2) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{0,5-\varepsilon} = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left(1-4(0{,}5-\varepsilon)^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = \frac{1}{\pi}.$$

Согласно определению, дисперсия случайной величины X равна

$$D[X]=M[(X-M[X])^2].$$

На практике для вычисления дисперсии используют ее свойство, по которому

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X].$$

Математическое ожидание квадрата случайной величины X также является несобственным интегралом второго рода:

$$M[X^2]=\int_0^{0,5}\frac{4x^2}{\pi\sqrt{1-4x^2}}dx\left|\begin{array}{ll}\multicolumn{2}{c}{\text{Интегрируем по частям}}\\ u=x & du=dx\\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} & v=-\dfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-x\sqrt{1-4x^2}\Big|_0^{0,5-\varepsilon}+\int_0^{0,5-\varepsilon}\sqrt{1-4x^2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{0,5}\sqrt{1-4x^2}dx\left|\begin{array}{l}\text{Производим замену}\\ 2x=\cos t,\ \ dx=-\dfrac{1}{2}\sin t dt,\ \ t=\arccos 2x,\ \ \sqrt{1-4x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t\\ \text{Пересчитываем пределы интегрирования}\\ t_н=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}\qquad t_в=\arccos 1=0\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\frac{t}{4\pi}-\frac{\sin 2t}{8\pi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины X, используя представленную ранее формулу:

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}=0,0237.$$

Для произвольной случайной величины **X** справедливо, что вероятность

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a).$$

Для непрерывной случайной величины неравенство может быть строгим или нестрогим с обеих сторон. В нашем случае вероятность

$$P(0,25\le X\le 1)=F(1)-F(0,25)=1-\frac{2}{\pi}\arcsin 2\cdot 0,25=1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}.$$

Подробнее материал по функции распределения, плотности вероятности случайной величины можно изучить по [1] гл. 10 § 1–3, гл. 11 § 1–5, и [4] 3.1–4.2. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 252, 297, [3] 861, 872.

3.8. Числовые характеристики случайных величин

К числовым характеристикам случайной величины относятся:
математическое ожидание

$$M[X] = \begin{cases} \sum\limits_i x_i P(X = x_i), & \text{для дискретной случайной величины} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, & \text{для непрерывной случайной величины;} \end{cases}$$

дисперсия $D[X] = M[(X - M[X])^2]$;

среднеквадратичное отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$);

коэффициент вариации $V[X] = \dfrac{\sigma[X]}{M[X]}$;

начальные моменты k-того порядка $\nu_k = M[X^k]$;

центральные моменты k-того порядка $\mu_k = M[(X - M[X])^k]$;

асимметрия $A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$;

эксцесс $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$;

мода — наивероятнейшее значение случайной величины;
медиана — значение случайной величины Me, для которого $P(X < Me) = P(X > Me)$, и ряд других.

Пример. Вычислите коэффициент вариации выручки предприятия за два торговых дня из примера 3.2.

Решение. Выручка предприятия за торговый день подчиняется равномерному распределению с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a; b] \\ \dfrac{1}{b-a} & x \in [a; b]. \end{cases}$$

Математическое ожидание выручки за торговый день равно

$$M[X] = \int\limits_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{30+60}{2} = 45.$$

Дисперсия выручки за день равна

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] == \int\limits_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(60-30)^2}{12} = 75.$$

Математическое ожидание выручки за два торговых дня равно

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y] = 45 + 45 = 90.$$

Дисперсия выручки за два торговых дня при условии независимости случайных величин X и Y равна

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] = 75 + 75 = 150.$$

Среднеквадратичное отклонение выручки за два торговых дня равно

$$\sigma[X+Y] = \sqrt{D[X+Y]} = \sqrt{150} = 12{,}25.$$

Коэффициент вариации выручки за два торговых дня равен

$$V[X+Y]=\frac{\sigma[X+Y]}{M[X+Y]}=\frac{12,25}{90}=0,136=13,6\ \%.$$

Подробнее материал по числовым характеристикам случайных величин можно изучить по [1] гл. 7 § 1, 2, гл. 12 § 1, гл.8 § 1–10, и [4] 4.1,4.2. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 320, 321 [3] 876, 877.

3.9. Распределение функции от случайной величины

Если $Y=\varphi(X)$ и функция φ монотонна, то плотность вероятности случайной величины Y равна

$$f_Y(y)=f_X(\varphi^{-1}(y))\left|(\varphi^{-1}(y))'\right|,$$

где $f_X(x)$ — плотность вероятности случайной величины X.

Пример. Количественные продажи товара и соответственно объем его производства подчиняются равномерному распределению

$$f_X(x)=\begin{cases}0,025 & x\in(90;130)\\ 0 & x\notin(90;130).\end{cases}$$

Издержки, зависят от объема производства товара и равны

$$y=\varphi(x)=2x^2-400x+30000.$$

Найдите плотность вероятности издержек предприятия.

Решение. Выделим полный квадрат функции издержек:

$$y=2(x^2-2\cdot100\cdot x+10000)-20000+30000=2(x-100)^2+10000.$$

На интервале $x\in(90;130)$ функция издержек не является монотонной. На интервале $x\in(90;100)$ она монотонно убывает, а на интервале $x\in(100;130)$ монотонно возрастает. Вычислим значения функции издержек на границах интервалов монотонности:

$x = 90$ $\quad$ $y = 2\cdot(90-100)^2 + 10000 = 10200;$

$x = 100$ $\quad$ $y = 10000;$

$x = 130$ $\quad$ $y = 13200.$

Для каждого интервала монотонности определим обратную функцию, которая связывает объем продаж с издержками

$$x=\varphi^{-1}(y)=\begin{cases}100-\sqrt{\dfrac{y-10000}{2}} & y\in(10000;10200)\\[2ex] 100+\sqrt{\dfrac{y-10000}{2}} & y\in(10000;13200).\end{cases}$$

Определим модуль производной обратной функции

$$x'=\left|\left(\varphi^{-1}(y)\right)'\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2(y-10000)}} & y\in(10000;10200)\\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{2(y-10000)}} & y\in(10000;13200).\end{cases}$$

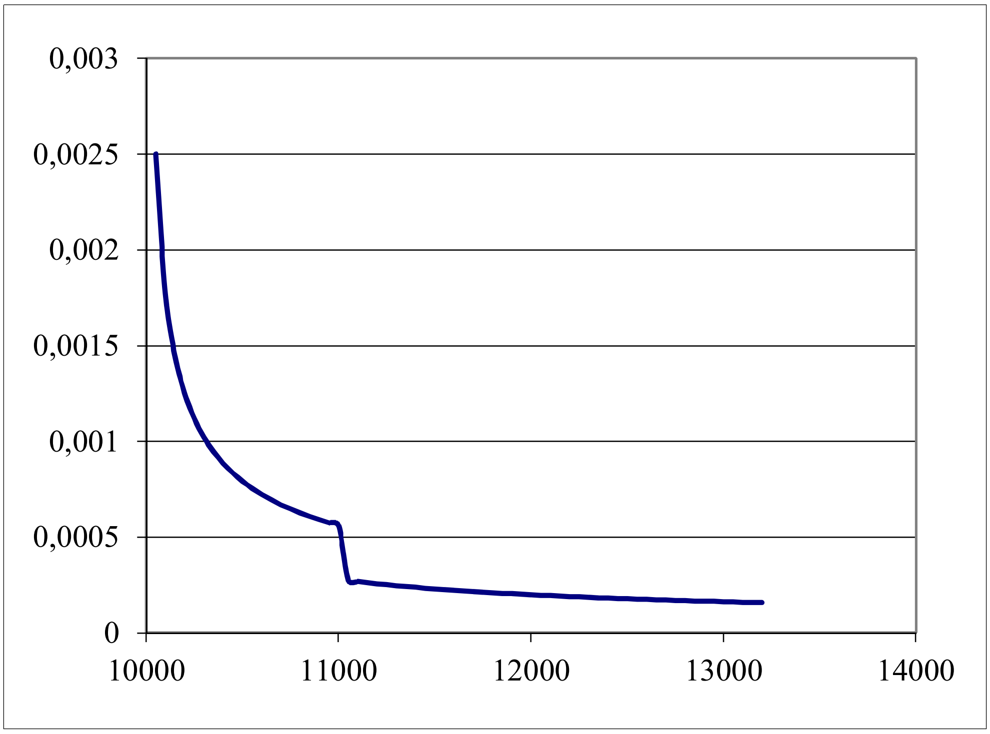
Вычислим плотность вероятности издержек предприятия

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\left|(\varphi^{-1}(y))'\right| = \begin{cases} 0{,}025 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2(y-10000)}} & y \in (10000;10200) \\ 0{,}025 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2(y-10000)}} & y \in (10000;13200). \end{cases}$$

Интервал $(10000;10200)$ пересекается с интервалом $(10000;13200)$. Объединим пересекающиеся части и сложим плотности вероятности на пересечении. Получим

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}025 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2(y-10000)}} & y \in (10000;10200] \\ 0{,}025 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2(y-10000)}} & y \in (10200;13200). \end{cases}$$

График плотности вероятности издержек $f_Y(y)$:



Подробнее материал по распределению функции от случайной величины можно изучить по [1] гл. 12 § 10, и [4] 9.1, 9.2. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 375, 376, 377, 380.

3.10. Математическая статистика

Пример. В таблице представлены наблюдения случайной величины X:

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
X	3	0	1	1	1	1	0	2	0	0	1	2	1	1	1	2	0	0	1	0
N	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
X	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	3	2	1	1	2	1	1	1

Для данных наблюдений:

1) Определите выборочное распределение случайной величины X и постройте многоугольник ее распределения;

2) Получите оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X. Определите для них 95 % доверительные интервалы;

3) Считая, что случайная величина X подчиняется биномиальному распределению (число опытов определяется наибольшим значением X) рассчитайте ее теоретическое распределение и постройте многоугольник ее теоретического распределения;

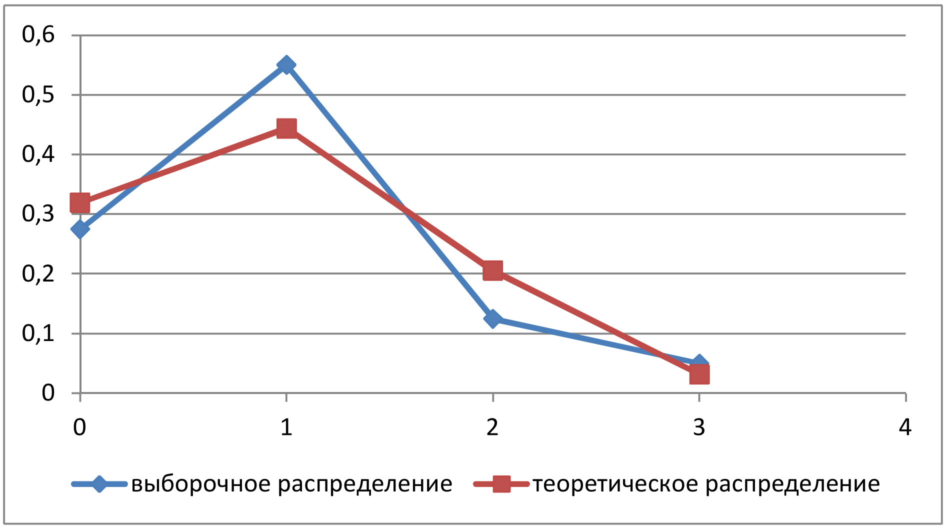
4) По критерию Пирсона с уровнем значимости 0,05 проверьте гипотезу о биномиальном распределении случайной величины X.

Решение.

1) Составим таблицу частот случайной величины X. Для этого определим диапазон ее значений. Наименьшее значение X равно 0, наибольшее значение равно 3. Подсчитаем количество наблюдений X равных 0, получим $n_1 = 11$. Подсчитаем количество наблюдений X равных 1, получим $n_2 = 22$. Аналогично заполним остальные столбцы второй строки таблицы.

Выборочное распределение					
x_i	0	1	2	3	**Σ**
n_i	11	22	5	2	**40**
$\hat{p}_i = \dfrac{n_i}{N}$	0,275	0,55	0,125	0,05	**1**
p_i	0,319	0,444	0,206	0,032	**1**
$\dfrac{(p_i - \hat{p}_i)^2}{p_i}$	0,0061	0,0255	0,0316	0,0105	**0,0737**

Рассчитаем частости (относительные частоты) случайной величины X. Для этого разделим частоты на число наблюдений N. Получим выборочное распределение, которое представлено в третьей строке таблицы. В соответствии с полученным выборочным распределением, построим многоугольник распределения случайной величины X.



2) Оценка математического ожидания случайной величины X равна среднему арифметическому ее наблюдений:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i ,$$

С помощью таблицы частот можно ускорить вычисления и оценить математическое ожидание X по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{1}{40}(0\cdot 11 + 1\cdot 22 + 2\cdot 5 + 3\cdot 2) = 0{,}950 ,$$

где n — число столбцов в таблице частот. Выборочную дисперсию случайной величины X также вычислим с помощью таблицы:

$$S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \bar{x}^2 = 1{,}5 - 0{,}95^2 = 0{,}598 .$$

Несмещенная оценка дисперсии больше ее выборочного значения и равна

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{N}{N-1} S_x^2 = 0{,}613 .$$

Доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X имеет вид:

$$\bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\cdot t_\alpha < M[X] < \bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\cdot t_\alpha ,$$

где t_α — критическая точка распределения Стьюдента. По условию задачи доверительная вероятность равна 0,95, уровень значимости равен $1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Число степеней свободы N – 1 = 39. По таблице критических точек распределения Стьюдента (Приложение 3) находим $t_\alpha = 2{,}023$. В результате получим доверительный интервал:

$$0{,}950 - \sqrt{\frac{0{,}613}{40}}\cdot 2{,}023 < M[X] < 0{,}950 + \sqrt{\frac{0{,}613}{40}}\cdot 2{,}023$$

$$0{,}700 < M[X] < 1{,}200.$$

Доверительный интервал для дисперсии случайной величины X имеет вид

$$\frac{N \cdot S_x^2}{\chi_в^2} < D[X] < \frac{N \cdot S_x^2}{\chi_н^2},$$

где $\chi_н^2$ и $\chi_в^2$ соответственно нижняя и верхняя критические точки распределения χ^2. При заданной доверительной вероятности 0,95, определяем вероятность 1 – 0,95 = 0,05. Делим ее пополам 0,05/2 = 0,025. По таблице критических точек распределения χ^2 (Приложение 2) с уровнем значимости 0,025 и числом степеней свободы 40 – 1 = 39 находим $\chi_в^2$ = 58,12. Затем находим уровень значимости для нижнего критического значения 1 – 0,025 = 0,975. После этого определяем $\chi_н^2$ = 23,65. Подставляем найденные значения в формулу для доверительного интервала. Получим

$$\frac{40 \cdot 0{,}598}{58{,}12} < D[X] < \frac{40 \cdot 0{,}598}{23{,}65}$$

$$0{,}412 < D[X] < 1{,}011.$$

3) Допускаем, что случайная величина X подчиняется биномиальному распределению. Чтобы рассчитать теоретическое распределение, необходимо оценить его параметры. По условию задачи число наблюдений равно наибольшему значению случайной величины X. В таблице исходных данных находим, что наибольшее значение X равно 3. Таким образом число наблюдений n = 3. Оценим вероятность успеха. Математическое ожидание случайной величины, которая подчиняется биномиальному распределению, равно

$$M[X] = n \cdot p,$$

где p — вероятность успеха. Оценка математического ожидания $\bar{x} = 0{,}950$. Оценка вероятности успеха равна

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{0{,}950}{3} = 0{,}317.$$

В соответствии с формулой биномиального распределения теоретические значения вероятности равны

$$p_i = C_n^{x_i} \hat{p}^{x_i} (1 - \hat{p})^{n - x_i}.$$

Результаты расчетов показаны в 4-й строке таблицы выборочного распределения. В соответствии с результатами расчетов на рисунке построен многоугольник теоретического распределения.

4) Для проверки гипотезы о распределении случайной величины по критерию Пирсона необходимо рассчитать случайную величину

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^{n} \frac{(p_i - \hat{p}_i)^2}{p_i} = 40 \cdot 0{,}0737 = 2{,}948.$$

По критерию Пирсона если выборочное (эмпирическое) распределение соответствует теоретическому, тогда данная случайная величина подчиняется распределению χ^2 с n–k–1 числом степеней свободы, где n — число значений случайной величины, а k — число параметров теоретического распределения, которые определялись с помощью данных наблюдений. В нашем случае n = 4, k = 1, так как с помощью данных наблюдений определялся один параметр распределения — вероятность успеха. Таким образом, число степеней свободы распределения χ^2 равно 4 – 1 – 1 = 2. По таблице критических точек распределения χ^2 (Приложение 2) с уровнем значимости 0,05 и числом степеней свободы 2 находим $\chi^2_{кр} = 5,99$. Поскольку 2,948 < 5,99, то с уровнем значимости 0,05 принимается гипотеза о биномиальном распределении случайной величины X.

Подробнее материал по математической статистике можно изучить по [1] гл. 15 § 1–8, гл. 16 § 2, 8–10, 13–16, гл. 19 § 1–6, 23, 24, и [4] 11.1–11.9. Рекомендуется разобрать решение задач [2] 457, 321, 509, 636 [3] 948.

4. ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ

ЕН.Ф.01	Математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Сущность и условия применимости теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство. Случайные величины и способы их описания. Модели законов распределения вероятностей, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях. Закон распределения вероятностей для функций от известных случайных величин. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел и его следствие. Особая роль нормального распределения: центральная предельная теорема. Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов. Статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных.	

5. ПРОГРАММА КУРСА

1. Опыт. Пространство элементарных событий. Случайные события. Алгебра событий.
2. Частота событий. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Аксиомы вероятности. Следствия аксиом. Теорема сложения вероятностей.

3. Условная вероятность. Вероятность произведения событий. Независимость событий. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Полиномиальное распределение.
5. Случайные величины. Распределение вероятностей дискретной случайной величины. Ряд распределения. Многоугольник распределения. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.
6. Примеры распределений дискретных случайных величин: гипергеометрическое, биномиальное, геометрическое, Пуассона. Примеры распределений непрерывных случайных величин: равномерное, нормальное, показательное.
7. Многомерные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения многомерной случайной величины. Условные распределения. Независимость случайных величин. Распределение суммы двух случайных величин.
8. Распределение функций от случайных величин.
9. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии. Начальные и центральные моменты случайной величины. Ковариация двух случайных величин. Коэффициент корреляции двух случайных величин и его свойства.
10. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли. Теорема Хинчина.
11. Характеристическая функция случайной величины и ее свойства.
12. Предельные теоремы теории вероятностей. Центральная предельная теорема для сумм одинаково распределенных слагаемых. Теорема Ляпунова.
13. Предмет математической статистики. Обработка данных наблюдений. Первичная статистическая совокупность. Статистический ряд. Гистограмма. Статистическая функция распределения. Статистические начальные и центральные моменты.
14. Точечные оценки неизвестных параметров распределений. Состоятельность, несмещенность и эффективность точечных оценок, метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для получения точечных оценок.
15. Интервальные оценки неизвестных параметров распределений.
16. Статистическая проверка гипотез о параметрах распределений и о распределениях. Критерий согласия Пирсона.

6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение вероятностного пространства.
2. Сформулируйте аксиомы вероятности.
3. Сформулируйте и докажите следствия аксиом вероятности. Чему равна вероятность объединения (суммы) событий.
4. Дайте классическое определение вероятности.
5. Дайте определение геометрической вероятности.
6. Дайте определение условной вероятности. Какие события называются независимыми? Чему равна вероятность пересечения (произведения) событий?
7. Выведите формулу полной вероятности.
8. Выведите формулу Байеса.
9. Дайте определение последовательности независимых испытаний, опишите схему Бернулли и выведите формулу Бернулли.
10. Сформулируйте локальную предельную теорему Муавра-Лапласа, докажите теорему Пуассона. Когда применяются эти теоремы?
11. Дайте определение случайной величины. Приведите примеры.
12. Что называется распределением вероятности случайной величины?
13. Покажите ряд распределения и многоугольник распределения случайной величины.
14. Дайте определение функции распределения случайной величины и докажите ее свойства.
15. Дайте определение плотности вероятности случайной величины и докажите ее свойства.
16. Приведите примеры случайных величин, которые подчиняются распределениям: гипергеометрическому, биномиальному, геометрическому и распределению Пуассона.
17. Приведите примеры случайных величин, которые подчиняются распределениям: равномерному, показательному и нормальному.
18. Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал, если она задана своей функцией распределения, плотностью распределения?
19. Как найти распределение функции от дискретной и непрерывной случайной величины?
20. Как найти вероятность попадания пары случайных величин в заданный прямоугольник?
21. Какие две случайные величины называются независимыми? Что представляет собой распределение суммы двух независимых случайных величин?
22. Дайте определение математического ожидания случайной величины и докажите его свойства.
23. Дайте определение дисперсии случайной величины и докажите ее свойства. Что называется среднеквадратичным отклонением случайной величины?

24. Что называется ковариацей двух случайных величин? Что называется коэффициентом корреляции? Докажите его свойства.
25. Докажите неравенство и теорему Чебышева.
26. Что называется характеристической функцией случайной величины? Докажите свойства характеристической функции.
27. Сформулируйте центральную предельную теорему и теорему Ляпунова.
28. Как производится группировка случайной величины? Что называется гистограммой? Как с помощью гистограммы построить статистическую функцию распределения?
29. Какие вы знаете точечные оценки неизвестных параметров распределений? Дайте определение несмещенной, состоятельной и эффективной оценки.
30. Оцените параметры нормального и биномиального распределений методом наибольшего правдоподобия.
31. Как найдите доверительный интервал для математического ожидания случайной величины, если число наблюдений случайной величины считается большим?
32. Как проверить гипотезу о теоретическом распределении случайной величины? Как находится число степеней свободы распределения χ^2?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии приводятся контрольные задания и методические указания к выполнению работ по теории вероятностей и математической статистике. Опыт и традиции преподавания предмета на кафедре высшей математики определяют то, что основное внимание и большая часть излагаемого материала посвящаются теории вероятностей. По математической статистике предлагается только одно задание. Отчасти это определяется отсутствием материальной базы. Как правило, занятия по предмету проводятся в обычной аудитории, не оборудованной техническими средствами. Для преподавания математической статистики в полном объеме требуется проведение занятий в компьютерном классе.

Авторами данного пособия планируется выпуск методических указаний и заданий по математической статистике, где предмет и основные задачи математической статистики будут представлены более полно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2008. 416 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов, Ч. 2. М.: «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. 416 с.
4. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2010. 480 с.

Приложение 1

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,000	0,30	0,118	0,60	0,226	0,90	0,316	1,20	0,385	1,50	0,433	1,80	0,464
0,01	0,004	0,31	0,122	0,61	0,229	0,91	0,319	1,21	0,387	1,51	0,434	1,81	0,465
0,02	0,008	0,32	0,126	0,62	0,232	0,92	0,321	1,22	0,389	1,52	0,436	1,82	0,466
0,03	0,012	0,33	0,129	0,63	0,236	0,93	0,324	1,23	0,391	1,53	0,437	1,83	0,466
0,04	0,016	0,34	0,133	0,64	0,239	0,94	0,326	1,24	0,393	1,54	0,438	1,84	0,467
0,05	0,020	0,35	0,137	0,65	0,242	0,95	0,329	1,25	0,394	1,55	0,439	1,85	0,468
0,06	0,024	0,36	0,141	0,66	0,245	0,96	0,331	1,26	0,396	1,56	0,441	1,86	0,469
0,07	0,028	0,37	0,144	0,67	0,249	0,97	0,334	1,27	0,398	1,57	0,442	1,87	0,469
0,08	0,032	0,38	0,148	0,68	0,252	0,98	0,336	1,28	0,400	1,58	0,443	1,88	0,470
0,09	0,036	0,39	0,152	0,69	0,255	0,99	0,339	1,29	0,401	1,59	0,444	1,89	0,471
0,10	0,040	0,40	0,155	0,70	0,258	1,00	0,341	1,30	0,403	1,60	0,445	1,90	0,471
0,11	0,044	0,41	0,159	0,71	0,261	1,01	0,344	1,31	0,405	1,61	0,446	1,91	0,472
0,12	0,048	0,42	0,163	0,72	0,264	1,02	0,346	1,32	0,407	1,62	0,447	1,92	0,473
0,13	0,052	0,43	0,166	0,73	0,267	1,03	0,348	1,33	0,408	1,63	0,448	1,93	0,473
0,14	0,056	0,44	0,170	0,74	0,270	1,04	0,351	1,34	0,410	1,64	0,449	1,94	0,474
0,15	0,060	0,45	0,174	0,75	0,273	1,05	0,353	1,35	0,411	1,65	0,451	1,95	0,474
0,16	0,064	0,46	0,177	0,76	0,276	1,06	0,355	1,36	0,413	1,66	0,452	1,96	0,475
0,17	0,067	0,47	0,181	0,77	0,279	1,07	0,358	1,37	0,415	1,67	0,453	1,97	0,476
0,18	0,071	0,48	0,184	0,78	0,282	1,08	0,360	1,38	0,416	1,68	0,454	1,98	0,476
0,19	0,075	0,49	0,188	0,79	0,285	1,09	0,362	1,39	0,418	1,69	0,454	1,99	0,477
0,20	0,079	0,50	0,191	0,80	0,288	1,10	0,364	1,40	0,419	1,70	0,455	2,00	0,477
0,21	0,083	0,51	0,195	0,81	0,291	1,11	0,367	1,41	0,421	1,71	0,456	2,10	0,482
0,22	0,087	0,52	0,198	0,82	0,294	1,12	0,369	1,42	0,422	1,72	0,457	2,20	0,486
0,23	0,091	0,53	0,202	0,83	0,297	1,13	0,371	1,43	0,424	1,73	0,458	2,30	0,489
0,24	0,095	0,54	0,205	0,84	0,300	1,14	0,373	1,44	0,425	1,74	0,459	2,40	0,492
0,25	0,099	0,55	0,209	0,85	0,302	1,15	0,375	1,45	0,426	1,75	0,460	2,50	0,494
0,26	0,103	0,56	0,212	0,86	0,305	1,16	0,377	1,46	0,428	1,76	0,461	2,60	0,495
0,27	0,106	0,57	0,216	0,87	0,308	1,17	0,379	1,47	0,429	1,77	0,462	2,70	0,497
0,28	0,110	0,58	0,219	0,88	0,311	1,18	0,381	1,48	0,431	1,78	0,462	2,80	0,497
0,29	0,114	0,59	0,222	0,89	0,313	1,19	0,383	1,49	0,432	1,79	0,463	2,90	0,498

$\Phi(-x) = -\,\Phi(x)$; $\Phi(+\infty) = 0{,}5$.

Приложение 2

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α				Число степеней свободы k	Уровень значимости α			
	0,025	0,05	0,95	0,975		0,025	0,05	0,95	0,975
1	5,02	3,84	0,00	0,00	26	41,92	38,89	15,38	13,84
2	7,38	5,99	0,10	0,05	27	43,19	40,11	16,15	14,57
3	9,35	7,81	0,35	0,22	28	44,46	41,34	16,93	15,31
4	11,14	9,49	0,71	0,48	29	45,72	42,56	17,71	16,05
5	12,83	11,07	1,15	0,83	30	46,98	43,77	18,49	16,79
6	14,45	12,59	1,64	1,24	31	48,23	44,99	19,28	17,54
7	16,01	14,07	2,17	1,69	32	49,48	46,19	20,07	18,29
8	17,53	15,51	2,73	2,18	33	50,73	47,40	20,87	19,05
9	19,02	16,92	3,33	2,70	34	51,97	48,60	21,66	19,81
10	20,48	18,31	3,94	3,25	35	53,20	49,80	22,47	20,57
11	21,92	19,68	4,57	3,82	36	54,44	51,00	23,27	21,34
12	23,34	21,03	5,23	4,40	37	55,67	52,19	24,07	22,11
13	24,74	22,36	5,89	5,01	38	56,90	53,38	24,88	22,88
14	26,12	23,68	6,57	5,63	39	58,12	54,57	25,70	23,65
15	27,49	25,00	7,26	6,26	40	59,34	55,76	26,51	24,43
16	28,85	26,30	7,96	6,91	41	60,56	56,94	27,33	25,21
17	30,19	27,59	8,67	7,56	42	61,78	58,12	28,14	26,00
18	31,53	28,87	9,39	8,23	43	62,99	59,30	28,96	26,79
19	32,85	30,14	10,12	8,91	44	64,20	60,48	29,79	27,57
20	34,17	31,41	10,85	9,59	45	65,41	61,66	30,61	28,37
21	35,48	32,67	11,59	10,28	46	66,62	62,83	31,44	29,16
22	36,78	33,92	12,34	10,98	47	67,82	64,00	32,27	29,96
23	38,08	35,17	13,09	11,69	48	69,02	65,17	33,10	30,75
24	39,36	36,42	13,85	12,40	49	70,22	66,34	33,93	31,55
25	40,65	37,65	14,61	13,12	50	71,42	67,50	34,76	32,36

Приложение 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонний)			Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонний)		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	6,314	12,706	63,656	26	1,706	2,056	2,779
2	2,920	4,303	9,925	27	1,703	2,052	2,771
3	2,353	3,182	5,841	28	1,701	2,048	2,763
4	2,132	2,776	4,604	29	1,699	2,045	2,756
5	2,015	2,571	4,032	30	1,697	2,042	2,750
6	1,943	2,447	3,707	31	1,696	2,040	2,744
7	1,895	2,365	3,499	32	1,694	2,037	2,738
8	1,860	2,306	3,355	33	1,692	2,035	2,733
9	1,833	2,262	3,250	34	1,691	2,032	2,728
10	1,812	2,228	3,169	35	1,690	2,030	2,724
11	1,796	2,201	3,106	36	1,688	2,028	2,719
12	1,782	2,179	3,055	37	1,687	2,026	2,715
13	1,771	2,160	3,012	38	1,686	2,024	2,712
14	1,761	2,145	2,977	39	1,685	2,023	2,708
15	1,753	2,131	2,947	40	1,684	2,021	2,704
16	1,746	2,120	2,921	41	1,683	2,020	2,701
17	1,740	2,110	2,898	42	1,682	2,018	2,698
18	1,734	2,101	2,878	43	1,681	2,017	2,695
19	1,729	2,093	2,861	44	1,680	2,015	2,692
20	1,725	2,086	2,845	45	1,679	2,014	2,690
21	1,721	2,080	2,831	46	1,679	2,013	2,687
22	1,717	2,074	2,819	47	1,678	2,012	2,685
23	1,714	2,069	2,807	48	1,677	2,011	2,682
24	1,711	2,064	2,797	49	1,677	2,010	2,680
25	1,708	2,060	2,787	50	1,676	2,009	2,678

Учебное издание

Астахова Ина Сергеевна
Кошмак Виктор Константинович
Лисенков Андрей Викторович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие

Технический редактор: В. К. Кошмак
Компьютерная верстка: В. К. Кошмак
Корректор: С. Н. Емельянова

Подписано в печать 09.03.2016. Формат 60×90/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. п. л. 2.5.
Тираж 100 экз. Заказ № 5175.

Изготовлено на Versant 2100.

Адрес издательства:
Россия, 180000, Псков, ул. Л. Толстого, 4[а], корп. 3[а].
Издательство Псковского государственного университета

ISBN 978-5-91116-445-4