А. А. Хватцев

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Псков
Псковский государственный университет
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Псковский государственный университет

А. А. Хватцев

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
И ИХ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Псковского государственного университета

Псков
Псковский государственный университет
2016

УДК 517.38;
ББК 22.161.6
Х30

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Псковского государственного университета

Рецензенты:
— П. В. Герасименко, заслуженный деятель науки РФ, академик МАН ВШ, д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения;
— И. О. Соловьёва, доцент, канд. пед. наук, зав. кафедрой математики и методики обучения математике ПсковГУ

Хватцев, А. А.
Х30 Двойные интегралы и их некоторые приложения : учебное пособие. — Псков : Псковский государственный университет, 2016. — 80 с.
ISBN 978-5-91116-433-1

В учебном пособии излагаются вопросы теории собственных интегралов, зависящих от параметров, двойных интегралов и их приложений. Эти темы традиционно рассматриваются в курсе математического анализа. Значительное место в пособии отведено практическому использованию двойных интегралов в задачах геометрии. Рассмотрено большое количество примеров (общим числом 45), при этом особое внимание уделено выбору переменных интегрирования в зависимости от формы области интегрирования и вида подынтегральной функции. Пособие рекомендуется студентам, обучающимся по направлению «Математика и компьютерные науки» и студентам технических специальностей, а также начинающим преподавателям.

УДК 517.38
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-91116-433-1

Содержание

1. Собственные интегралы, зависящие от параметров

1.1. Определение интегралов, зависящих от параметров

Пусть в прямоугольнике $\overline{P} = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ задана функция $f(x, y)$, которая обладает таким свойством, что при каждом фиксированном значении $y \in [c, d]$ существует определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ (например, это будет справедливо, если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\overline{P}$). Следовательно, интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ определяет некоторую функцию переменной y, определённую на отрезке $[c, d]$. Обозначим эту функцию следующим образом

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx, \quad y \in [c, d] \tag{1.1}$$

и назовём *собственным интегралом, зависящим от параметра* y.

Теперь рассмотрим общий случай, когда пределы интегрирования в интеграле (1.1) также зависят от параметра y.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = c,\ y = d\ (c < d),\ x = \varphi(y),\ x = \psi(y)$, где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — функции, непрерывные на отрезке $[c, d]$ и такие, что $\varphi(y) \le \psi(y),\ y \in [c, d]$. И пусть при каждом фиксированном значении $y \in [c, d]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$ (также как и прежде это будет справедливо, например, если функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\overline{D}$). Следовательно, интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$ определяет некоторую функцию переменной y, определённую на отрезке $[c, d]$.

Будем называть эту функцию *собственным интегралом, зависящим от параметра* y *с пределами интегрирования, зависящими от параметра*, и сохраним прежнее обозначение, т. е.

$$I(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx, \quad y \in [c, d] \tag{1.2}$$

1.2. Предельный переход по параметру под знаком интеграла О непрерывности интеграла как функции параметра

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $\overline{P}$. Тогда для любой точки $y_0 \in [c,d]$выполняется соотношение

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx\right)=\int_a^b f(x,y_0)dx \qquad 1.3)$$

Доказательство. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $\overline{P}$, то по теореме Кантора $[1,2]$ она и равномерно непрерывна в этом прямоугольнике. Поэтому, для $\forall(\varepsilon>0)$ и $\forall(y_0 \in [c,d])$ существует число $\delta>0$ такое, что для двух любых точек $(x,y)\in\overline{P}$ и $(x,y_0)\in\overline{P}$, для которых $|y-y_0|<\delta$, выполняется соотношение $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Следовательно,

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b f(x,y_0)dx\right|\le\int_a^b|f(x,y)-f(x,y_0)|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Но это как раз и означает, что $\displaystyle\int_a^b f(x,y_0)dx=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx$ ☻

Так как, $\displaystyle\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\lim_{y\to y_0} I(y)$, а $\displaystyle\int_a^b f(x,y_0)dx=I(y_0)$ и при этом y_0 — любое значение из отрезка $[c,d]$, то это означает, что интеграл (1.1) является непрерывной на отрезке $[c,d]$ функцией переменной y.

Пример 1. 1. Вычислить пределы $[3]$:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

►Подынтегральная функция непрерывна при любых натуральных значениях n и любых $x\in[0,1]$. Следовательно,

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}. \qquad (1.4)$$

Теперь сделаем замену $t=1+e^x, x=\ln(t-1)$, $dx=\frac{dt}{t-1}$, $x=0\to t=2$, $x=1\to t=1+e$. В результате интеграл (1.4) примет вид

$$I=\int_2^{1+e}\frac{dt}{t(t-1)}=\int_2^{1+e}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=\int_2^{1+e}\frac{dt}{t-1}-\int_2^{1+e}\frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|\Big|_2^{1+e}=\ln\frac{2e}{1+e}$$

б) $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

►Вычислим сначала этот предел без использования теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Так как

$$\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Bigg|_\alpha^{1+\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$

Следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(arctg\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-arctg\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)=$$

$$=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}.$$

А теперь воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла. Функция $f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ непрерывна при любых значениях x и α. Функции $\varphi(y)=\alpha,\ \psi(y)=\alpha+1$ непрерывны при любых значениях α. Поэтому, функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в области $\overline{D}=\begin{cases}\alpha\le x\le\alpha+1\\ -c\le\alpha\le c\end{cases}$, где $c>0$ — любое конечное число, а функции $\varphi(y)=\alpha,\ \psi(y)=\alpha+1$ непрерывны на отрезке $[-c,c]$. В соответствии с замечанием $I(\alpha)\in C[-c,c]$, в том числе интеграл $I(\alpha)$ непрерывен в точке $\alpha=0$. Следовательно, $\lim\limits_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)$, т. е.

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

Замечание. Справедлива теорема и о непрерывности интеграла (1.2) как функции параметра: *если функция* $f(x, y) \in C(\overline{D})$ *и определён интеграл (1.2), зависящий от параметра* y, *то* $I(y) \in C[c, d]$ (доказательство этой теоремы можно найти, например, в [4]).

1.3. Дифференцирование по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{P})$ и, кроме того, имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$. Тогда интеграл (1.1), зависящий от параметра y, имеет на отрезке $[c,d]$ непрерывную производную $I'(y)$, причём выполняется соотношение

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x,y)dx\right) = \int_a^b f'_y(x,y)dx. \tag{1.5}$$

Доказательство. Воспользуемся определением производной. Возьмём и зафиксируем $\forall (y_0 \in [c, d])$. Теперь дадим y_0 произвольное приращение Δy, но такое, чтобы $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ и $\Delta y \neq 0$. Тогда

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b \left(f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)\right)dx. \tag{1.6}$$

По теореме Лагранжа [2] $f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) = f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y$, где $0 < \theta < 1$. Поэтому, соотношение (1.6) можно переписать в виде

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)dx. \tag{1.7}$$

По условию, производная $f'_y(x,y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$. Воспользуемся ещё теперь теоремой о предельном переходе под знаком интеграла и перейдём в (1.7) к пределу при $\Delta y \to 0$. В результате получим

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)dx = \int_a^b f'_y(x, y_0)dx.$$

Таким образом, показано, что $I'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0)dx$. Так как y_0 любое из отрезка $[c, d]$, то $I'(y)$ существует для $\forall (y \in [c,d])$ и выполняется соотношение (1.5). Остаётся показать, что $I'(y) \in C([c, d])$. Но это утверждение вытекает из непрерывности интеграла, стоящего в правой части (1.5) как функции параметра y. ☻

Пример 1.2. Вычислить интеграл [3]

$$I(\alpha)=\int_0^{0,5\pi}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$$

►Прежде всего, отметим, что $I(0)=0$. Числитель и знаменатель подынтегральной функции при $x\to+0$ обращаются в ноль, и оба они стремятся к бесконечности, если $x\to\frac{\pi}{2}-0$.

Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=\left|\begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\alpha\cos^2x}{\left(1+\alpha^2\operatorname{tg}^2x\right)\cos^2x}=0,$$

а $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\alpha\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}\alpha$. Поэтому подынтегральная функция непрерывна при любых значениях α и $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Продифференцируем $I(\alpha)$ по параметру

$$I'(\alpha)=\int_0^{0,5\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{\left(1+\alpha^2\operatorname{tg}^2x\right)}\frac{dx}{\operatorname{tg}x}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}x=t,\ x=\operatorname{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2},x=0\to t=0\\ x=0,5\pi\to t\to+\infty\end{matrix}\right|=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\alpha^2t^2\right)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{1}{\left(1+t^2\right)\left(1+\alpha^2t^2\right)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{1+\alpha^2t^2}\Rightarrow$$

$$(At+B)\left(1+\alpha^2t^2\right)+(Ct+D)\left(1+t^2\right)=1\ \Rightarrow \tag{1.8}$$

$$t=0\Rightarrow B+D=1$$

$$t=1\Rightarrow(A+B)\left(1+\alpha^2\right)+2(C+D)=1$$

$$t=-1\Rightarrow(-A+B)\left(1+\alpha^2\right)+2(-C+D)=1$$

Ещё одно уравнение для нахождения неизвестных A,B,C,D получим, приравняв коэффициенты при t^3 в обоих частях (1.8):

$$\alpha^2A+C=0.$$

Решив полученную систему, получим:

$$B=\frac{1}{1-\alpha^2},\ D=\frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2},\ C=A=0.$$

Таким образом, с учётом найденных значений A, B, C, D

$$\mathrm{I}'(\alpha)=\frac{1}{1-\alpha^2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+\alpha^2t^2}=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha^2}\operatorname{arctg}t\Big|_0^{+\infty}-\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\operatorname{arctg}(\alpha t)\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \alpha>0\\[2mm] \dfrac{1}{1-\alpha^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \alpha<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\alpha^2}(1-\alpha), & \alpha>0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\alpha^2}(1+\alpha), & \alpha<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\alpha}, & \alpha>0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<0\end{cases}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+|\alpha|}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{I}(\alpha)=\frac{\pi}{2}\int\frac{d\alpha}{1+|\alpha|}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)+C, & \alpha>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-\alpha)+C, & \alpha<0\end{cases}=\operatorname{sgn}(\alpha)\frac{\pi}{2}\ln(1+|\alpha|)+C.$$

Воспользуемся условием $\mathrm{I}(0)=0$ и определим, что $C=0$. Итак, окончательно получаем

$$\mathrm{I}(\alpha)=\operatorname{sgn}(\alpha)\frac{\pi}{2}\ln(1+|\alpha|).$$

Замечание. Рассмотренная теорема в случае интеграла (1.2) с пределами, зависящими от параметра, обобщается следующим образом [4]. *Пусть функция* $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и имеет в области* $\overline{D}$ *непрерывную частную производную* $f'_y(x,y)$. *Пусть функции* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *определены на отрезке* $[c,d]$ *и имеют там производные* $\varphi'(y)$ *и* $\psi'(y)$, *и определён интеграл* $I(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx,\quad y\in[c,d]$. *Тогда для любого* $y\in[c,d]$ *существует* $\mathrm{I}'(y)$, *причём*

$$\mathrm{I}'(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f'_y(x,y)dx+f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\varphi'(y)\qquad(1.9)$$

Пример 1.3. Найти $\mathrm{I}'(\alpha)$, если [3]:

$$\text{а) } \mathrm{I}(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx\,. \tag{1.10}$$

►Сначала отметим, что точка $x=0$ — особая точка подынтегральной функции. Поэтому интеграл (1.10) является несобственным интегралом второго рода. Но так как $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha$, то функция $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in(0,\alpha] \\ \alpha,\ x=0\end{cases}$ непрерывна на отрезке $[0,\alpha]$, а, значит, интегрируема. Следовательно, и интеграл (1.10) сходится. В соответствии с (1.9) имеем

$$\mathrm{I}'(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{x dx}{(1+\alpha x)x}+\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}\cdot\alpha'=\int\limits_0^{\alpha}\frac{dx}{1+\alpha x}+\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}=$$

$$\frac{1}{\alpha}\ln|1+\alpha x|\Bigg|_0^{\alpha}+\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\ln\left(1+\alpha^2\right)$$

$$\text{б) } \mathrm{I}(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx\,.$$

► В соответствии с (1.9) имеем

$$\mathrm{I}'(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dx+e^{\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}(\cos\alpha)'-e^{\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}(\sin\alpha)'=$$

$$=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dx-\sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$$

1.4. Интегрирование по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x,y)\in C(\overline{P})$ и пусть определён интеграл, зависящий от параметра $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx,\quad y\in[c,d]$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_c^d \mathrm{I}(y)dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx\,. \tag{1.11}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой о непрерывности интеграла, зависящего от параметра (см. п. 1.2.) $I(y)\in C([c,d])$. Следовательно, при любом $t \in [c, d]$ интеграл $\int\limits_c^t I(y)dy$ является интегралом с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Поэтому в соответствии с теоремой Барроу [2] выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_c^t I(y)dy\right) = I(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx,\ \ t \in [c,d]. \tag{1.12}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi(x,t) = \int\limits_c^t f(x,y)dy. \tag{1.13}$$

В выражении (1.13) переменная x под знаком интеграла, является параметром функции $\varphi(x,t)$. Понятно, что эта функция определена в прямоугольнике $\overline{P} = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le t \le d \end{cases}$.

Покажем, что $\varphi(x,t) \in C(\overline{P})$. Пусть точка (x,t) — любая фиксированная точка из прямоугольника $\overline{P}$. Возьмём приращения Δx и Δt — любые, но такие, что $(x+\Delta x, t+\Delta t) \in \overline{P}$.

Имеем

$$\begin{gathered}\varphi((x+\Delta x, t+\Delta t)) - \varphi(x,t) = \int\limits_c^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)dy - \int\limits_c^t f(x,y)dy = \\ = \int\limits_c^t \left(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\right)dy + \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)dy\end{gathered} \tag{1.14}$$

Пусть $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2}$. Если $\rho \to 0$, то одновременно и Δx и Δt также стремятся к нулю. Возьмём $\forall(\varepsilon > 0)$. Так как функция $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то она непрерывна и по каждому из своих аргументов [2]. Следовательно, $\lim\limits_{\rho \to 0, (\Delta x \to 0)} \left(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\right) = 0$. А это означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что

$$\left|f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\right| < \frac{\varepsilon}{c-d}, \text{ если } \rho < \delta.$$

Но тогда $\left|\int\limits_c^t \left(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\right)dy\right| < \frac{\varepsilon}{c-d} \cdot (t-c) \le \varepsilon$, если $\rho < \delta$.

Следовательно,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_c^t \big(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\big)dy = 0. \qquad (1.15)$$

Далее, так как $f(x,y)\in C(\overline{P})$, то по теореме Вейерштрасса $[2]$ эта функция и ограничена в прямоугольнике $\overline{P}$, т. е. существует такое положительное число M, что $|f(x,y)| < M$, $(x,y)\in\overline{P}$. Поэтому,

$$\left|\int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)dy\right| \le \int_t^{t+\Delta t} |f(x+\Delta x, y)|dy \le M\cdot|\Delta t|.$$

Следовательно,

$$\lim_{\rho\to 0, (\Delta t\to 0)} \int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)dy = 0. \qquad (1.16)$$

Теперь в выражении (1.14) перейдём к пределу при $\rho\to 0$ и воспользуемся соотношениями (1.15) и (1.16). В результате получим

$$\lim_{\rho\to 0}\big(\varphi((x+\Delta x, t+\Delta t)) - \varphi(x,t)\big) = 0. \qquad (1.17)$$

Соотношение (1.17) означает, что функция $\varphi(x,t)$ непрерывна в точке (x,y).

Так как эта точка любая из прямоугольника $\overline{P}$, приходим к выводу, что $\varphi(x,t)\in C(\overline{P})$. По теореме Барроу и (1.13) находим

$$\varphi_t'(x,t) = f(x,t). \qquad (1.18)$$

По условию $f(x,y)\in C(\overline{P})$. Поэтому и $\varphi_t'(x,t)\in C(\overline{P})$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b \varphi(x,t)dx = \int_a^b\left(\int_c^t f(x,y)dy\right)dx. \qquad (1.19)$$

В интеграле, стоящем в левой части (1.19), t является параметром. Мы показали, что функция $\varphi(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\varphi_t'(x,t)$ в прямоугольнике $\overline{P}$. Поэтому по теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b \varphi(x,t)dx\right) = \int_a^b \varphi_t'(x,t)dx = |\text{см. } (1.18)| = \int_a^b f(x,t)dx,\ t\in[c,d]. \qquad (1.20)$$

Сравнивая теперь соотношения (1.12) и (1.20), замечаем, что две функции $\int_c^t I(y)dy = \int_c^t\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ и $\int_a^b \varphi(x,t)dx = \int_a^b\left(\int_c^t f(x,y)dy\right)dx$ аргумента t имеют одинаковые производные на отрезке $[c,d]$. Значит, сами эти функции могут отличаться не более чем на постоянную величину. Другими словами

$$\int_c^t\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^t f(x,y)dy\right)dx+\mathrm{C}. \qquad (1.21)$$

Полагая в этом соотношении $\mathrm{t}=\mathrm{c}$, находим $\mathrm{C}=0$. Следовательно,

$$\int_c^t\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^t f(x,y)dy\right)dx,\ \mathrm{t}\in[\mathrm{c},\mathrm{d}]. \qquad (1.22)$$

Наконец, возьмём в выражении (1.22) $\mathrm{t}=\mathrm{d}$ и получим (1.11). ☻

Пример 1.4. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интегралы [3]:

$$\text{a)}\ \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ \ (a>0,b>0). \qquad (1.23)$$

► Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}$ имеет две особые точки $x=0$ и $x=1$, т. е. интеграл (1.23) — несобственный. Поэтому сначала докажем, что он сходится. Имеем:

1) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}=\left[\dfrac{0}{-\infty}\right]=0\Rightarrow$ справа от точки $x=0$ подынтегральная функция ограничена.

2) $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{x^{-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to1-0}\left(bx^b-ax^a\right)=b-a\Rightarrow$ слева от точки $x=1$ подынтегральная функция ограничена.

Функция $\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x),\ x\in(0,1)\\ 0,x=0\\ b-a,\ x=1\end{cases}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, а, значит, интегрируема. Следовательно, и интеграл (1.23) сходится.

Введём в рассмотрение интеграл, зависящий от параметра x:

$$I(x)=\int_a^b x^y dy\ (a>0,\ b>0),\ x\in[0,1]. \qquad (1.24)$$

$$I(x)=\int_a^b x^y dy=\left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_{y=a}^{y=b}=\frac{x^b-x^a}{\ln x}=f(x).$$

Функция x^y непрерывна в прямоугольнике $\overline{\Pi} = \begin{cases} a \le y \le b \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$. По теореме об интегрировании по параметру под знаком интеграла получаем:

$$\int_0^1 I(x)dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \left(\left. \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_{x=0}^{x=1} \right) dy =$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln|y+1| \Big|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

б) $$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad (1.25)$$

► Здесь также подынтегральная функция $g(x) = \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ имеет две особые точки $x = 0$ и $x = 1$, т. е. данный интеграл — несобственный. Поэтому сначала докажем, что он сходится.

Имеем:

$$\left| \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \right| \le 1, \text{ а } \lim_{x \to +0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to +0} g(x) = 0$.

Далее, $\lim\limits_{x \to 1-0} \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1-0} g(x) = 0$. Функция $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (0,1) \\ 0, & x = 0,\ x = 1 \end{cases}$ интегрируема на отрезке $[0,1]$. Следовательно, и исследуемый интеграл (1.25) сходится.

С учётом введённого ранее соотношения (1.24) интеграл (1.25) можно представить в виде

$$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) x^y dy \right) dx.$$

При вычислении интеграла, стоящего в правой части последнего выражения воспользуемся теоремой об интегрировании по параметру, приняв в качестве параметра x.

$$\int_0^1\left(\int_a^b \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx\right)dy=\int_a^b G(y)dy. \qquad (1.26)$$

$$G(y)=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx=\left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям}\\ u=\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right), du=-\frac{1}{x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\\ dv=x^y dx, v=\frac{x^{y+1}}{y+1}\end{array}\right|=$$

$$=\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^{y+1}}{y+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{y+1}\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx=\left|\begin{array}{l}u=\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\\ du=\frac{1}{x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\\ dv=x^y dx, v=\frac{x^{y+1}}{y+1}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{y+1}\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^{y+1}}{y+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{y+1}\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx\right)=\frac{1}{(y+1)^2}(1-G(y)).$$

Решив получившееся уравнение относительно $G(y)$, найдём

$$G(y)=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx=\frac{1}{(y+1)^2+1}.$$

Подставим найденное выражение для $G(y)$ в соотношение (1.26):

$$\int_0^1\left(\int_a^b\left(\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dy\right)\right)dx=\int_a^b G(y)dy=\int_a^b\frac{dy}{(y+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(y+1)\Big|_a^b=$$

$$=\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}(a+1)=\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$$

2. Двойные интегралы

2.1. Понятие области и её диаметра

Далее будут рассматриваться так называемые плоские области, поэтому сделаем несколько предварительных замечаний относительно понятия области и её диаметра.

Если заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости, то неотрицательное число

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

называется *расстоянием* между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Множество точек M плоскости, удовлетворяющих соотношению $\rho(M_0, M) < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ принято называть ε — *окрестностью точки* M_0. Ясно, что ε — окрестность точки M_0 составляют все точки, лежащие внутри круга радиуса ε с центром в точке M_0.

Пусть задано некоторое множество D точек плоскости. Точка M_0 называется *внутренней точкой* множества D, если существует (хотя бы одна) ε — окрестность точки M_0, состоящая целиком из точек множества D.

Точка M_0 называется *внешней точкой* множества D, если существует (хотя бы одна) ε — окрестность точки M_0, состоящая целиком из точек, не принадлежащих множеству D.

Точку M_0 называют *граничной точкой* множества D, если в любой ε — окрестности точки содержатся как точки, принадлежащие множеству D, так и точки, не принадлежащие множеству D. Совокупность всех граничных точек множества D образует границу этого множества.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Тогда множество точек плоскости $\{(\varphi(t), \psi(t))\}, t \in [a, b]$ будем называть *непрерывной кривой*. Если $\varphi(a) = \varphi(b)$ и $\psi(a) = \psi(b)$, то кривая называется *замкнутой*. Замкнутая кривая называется *самонепересекающейся*, если две точки этой кривой $(\varphi(t_1), \psi(t_1))$ и $(\varphi(t_2), \psi(t_2))$ при $t_1 < t_2$ могут совпасть только тогда, когда $t_1 = a$, $t_2 = b$.

Замкнутая самонепересекающаяся кривая L делит плоскость на два *связных* множества D и G. Связность множества D, например, означает, что две любые точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, нигде не пересекающей кривую L. Связное множество, все точки которого являются внутренними, будем называть *областью*. Если к области присоединить все её граничные точки, то полученное множество принято называть *замкнутой областью*. Например, если к области D присоединить все точки кривой L, то получится замкнутая область, ограниченная *контуром* L. Будем обозначать такую область $\overline{D}$, т. е. $\overline{D} = D \cup L$.

Пусть $\overline{D}$ — замкнутая область, ограниченная контуром L. И пусть M и N — две любые точки, лежащие на контуре L. Тогда число $d = \sup\limits_{M,N \in L} \{\rho(M, N)\}$ называется *диаметром* области $\overline{D}$. Можно показать, что на контуре L всегда найдутся, по крайней мере, две точки M_0 и N_0 такие, что $d = \rho(M_0, N_0)$.

Кривая L называется *простой*, если её можно разбить на конечное число частей, каждая из которых может быть задана хотя бы одним из уравнений вида $y = g(x), x \in [a, b]$ или $x = h(y), y \in [c, d]$, причём $g(x) \in C_{[a,b]}$, а $h[y] \in C_{[c,d]}$.

Область $\overline{D}$, ограниченная простым замкнутым контуром L, **квадрируема**, т. е. площадь области $\overline{D}$ и любой её части может быть вычислена, например, с помощью определённого интеграла [5].

2.2. Определение двойного интеграла

Пусть в области $\overline{D}$, ограниченной простым контуром L, задана функция $f(x, y)$.

Произвольной сетью простых кривых разобьём область $\overline{D}$ на n частичных областей $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \ldots, \overline{D_n}$. Обозначим через $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ площади этих частей, а их диаметры — $d_1, d_2, \ldots, d_n$, и пусть $\lambda = \max\limits_{k} d_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — ранг разбиения.

В каждой области $\overline{D}_k$ произвольным образом возьмём точку (ξ_k, η_k) и вычислим $f(\xi_k, \eta_k)$.

Умножим найденное значение $f(\xi_k, \eta_k)$ на площадь области $\overline{D}_k$, т. е. на ΔS_k.

Просуммировав все такие произведения, получим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k. \tag{2.1}$$

Сумма (2.1) строится точно по такому же правилу, что и интегральная сумма Римана для определённого интеграла. Поэтому естественно называть её также *суммой Римана*. Ясно, что сумма (2.1) зависит как от способа разбиения области $\overline{D}$ на частичные области $\overline{D}_k$, так и от способа выбора точек (ξ_k, η_k).

Теперь будем измельчать разбиение области $\overline{D}$ так, чтобы $\lambda \to 0$. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и если этот предел не зависит ни от способа дробления области $\overline{D}$ на части, ни от способа выбора точек (ξ_k, η_k) в каждой из частей, то его называют двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области $\overline{D}$ и обозначают символом $\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y) dxdy$. Таким образом, по определению

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta S_k . \qquad (2.2)$$

Замечания.

1. Выражение $I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ означает следующее: *для любого положительного числа* ε *можно отыскать положительное число* δ *такое, что для любого способа разбиения области* $\overline{D}$ *на части* $\overline{D}_k$*, у которого ранг разбиения* $\lambda<\delta$*, и любого способа выбора точек* (ξ_k,η_k) *в каждой из частей* $\overline{D}_k$*, выполняется неравенство* $|I-\sigma|<\varepsilon$.

2. Если у функции $f(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$ существует $\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy$, то говорят, что функция $f(x,y)$ интегрируема в $\overline{D}$, и используют обозначение $f(x,y)\in R(\overline{D})$.

2.3. Свойства двойных интегралов

Двойной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам определённого интеграла. Более того, как и для определённого интеграла, доказательство фактически всех этих свойств основывается на определении двойного интеграла и, поэтому, здесь опускается.

Свойство 1. $\iint\limits_{\overline{D}} \mu dxdy = \mu S$, где S — площадь области $\overline{D}$, а μ — произвольное число. В частности при $\mu=1$ получаем $\iint\limits_{\overline{D}} dxdy = S$.

Свойство 2. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области $\overline{D}$ (т. е. $f(x,y)\in R(\overline{D})$), а μ — произвольное число, то $\iint\limits_{\overline{D}} \mu f(x,y)\,dxdy = \mu\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy$.

Свойство 3. Если $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и $\varphi(x,y)\in R(\overline{D})$, то сумма этих функций также является интегрируемой в области $\overline{D}$ и $\iint\limits_{\overline{D}} (f(x,y)+\varphi(x,y))\,dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\overline{D}} \varphi(x,y)\,dxdy$

Свойство 4. Если область $\overline{D}$ состоит из двух частей $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, и эти части не имеют других общих точек, кроме точек граничных, а $f(x,y)\in R(\overline{D})$, то $\iint\limits_{\overline{D}_1\cup\overline{D}_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\overline{D}_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\overline{D}_2} f(x,y)\,dxdy$.

Свойство 5. Если $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и $\varphi(x,y)\in R(\overline{D})$, и для вех точек области $\overline{D}$ выполняется неравенство $f(x,y)\le\varphi(x,y)$, то $\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{\overline{D}} \varphi(x,y)dxdy$.

Замечание. Из **свойства 5** при $\varphi(x, y) \equiv 0$ получаем: если всюду в области $\overline{D}$ выполняется неравенство $f(x,y) \le 0$, то $\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\, dxdy \le 0$

Свойство 6. Пусть $f(x,y) \in R(\overline{D})$, и для всех точек области $\overline{D}$ выполняется неравенство $m \le f(x,y) \le M$. Тогда справедливо и соотношение $mS \le \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y) dxdy \le MS$.

Свойство 7. (теорема о среднем значении). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\overline{D}$, т. е. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, то в этой области найдется, по крайней мере, одна точка (ξ,η), в которой выполняется равенство $\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\, dxdy = S \cdot f(\xi,\eta)$.

Свойство 8. Пусть $f(x,y) \in R(\overline{D})$. Тогда выполняется неравенство $\left|\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y) dxdy\right| \le \iint\limits_{\overline{D}} |f(x,y)| dxdy$.

2.4. Признаки интегрируемости функций

Теорема 1 (об ограниченности функции $f(x,y)$ интегрируемой в области $\overline{D}$). Если функция $f(x,y)$ не ограничена в области $\overline{D}$, то она и не интегрируема в этой области, т. е. $f(x,y) \notin R(\overline{D})$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы об ограниченности функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

С помощью произвольной сети простых кривых разобьём область $\overline{D}$ на частичные области $\overline{D_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как функция $f(x,y)$ не ограничена в области $\overline{D}$, то она не ограничена хотя бы в одной из частичных областей $\overline{D_k}$. Для определённости будем считать, что $f(x,y)$ не ограничена в частичной области $\overline{D_n}$, а во всех остальных частях $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \ldots, \overline{D_{n-1}}$ эта функция является ограниченной. В каждой частичной области $\overline{D_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ произвольным образом выберем точку (ξ_k, η_k) и составим сумму

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k. \qquad (2.3)$$

Так как по предположению функция $f(x,y)$ не ограничена в частичной области $\overline{D_n}$, то для любого наперёд заданного положительного числа M найдётся, по крайней мере, одна такая точка

$(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}_n$, для которой выполняется соотношение $|f(\xi_n,\eta_n)|\cdot\Delta S_n\ge|\sigma_1|+M$. В этом случае для интегральной суммы будем иметь

$$|\sigma|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k\right|\ge|f(\xi_n,\eta_n)|\Delta S_n-|\sigma_1|\ge|\sigma_1|+M-|\sigma_1|\ge M.$$

Возьмём теперь числовую последовательность $\{M_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}M_n\to+\infty$, и последовательность разбиений области $\overline{D}$ на частичные области $\overline{D}_k$ такую, что ранг разбиения $\lambda\to 0$. Рассмотренным выше способом построим последовательность интегральных сумм $\{\sigma_n\}$, удовлетворяющих неравенству $|\sigma_n|\ge M_n$. Так как эта последовательность интегральных сумм расходится, то, следовательно, функция $f(x,y)$ не интегрируема в области $\overline{D}$. ☻

Признаки интегрируемости функции $f(x,y)$ в области $\overline{D}$, как и в случае определённого интеграла, основываются на понятии верхней и нижней сумм Дарбу.

Пусть функция $f(x,y)$ задана и ограничена в области $\overline{D}$, ограниченной простым контуром. С помощью произвольной сети простых кривых разобьём область $\overline{D}$ на частичные области $\overline{D}_k$, $k=1,2,\dots,n$, площадь которых равна ΔS_k.

Положим $M_k=\sup\limits_{\overline{D}_k}\{f(x,y)\}$, а $m_k=\inf\limits_{\overline{D}_k}\{f(x,y)\}$.

Суммы $S=\sum\limits_{k=1}^{n}M_k\Delta S_k$ и $s=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\Delta S_k$ называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу*. Ясно, что эти суммы зависят от выбранного способа разбиения области $\overline{D}$ на частичные области $\overline{D}_k$, $k=1,2,\dots,n$ и для каждого способа дробления принимают вполне конкретные значения. Подчеркнём ещё раз, что интегральная сумма Римана (2.1) для любого способа разбиения зависит ещё и от способа выбора промежуточных точек (ξ_k,η_k) в каждой из частичных областей $\overline{D}_k$, $k=1,2,\dots,n$.

Суммы Дарбу обладают свойствами, которые в точности совпадают со свойствами сумм Дарбу, рассмотренными ранее при изучении определённого интеграла [5].

1. Пусть S и s — верхняя и нижняя суммы Дарбу для выбранного способа разбиения области $\overline{D}$, а $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу разбиения области $\overline{D}$.

Тогда для любой интегральной суммы $\sigma \in \{\sigma\}$ справедливо неравенство $s \le \sigma \le S$.

2. Пусть S и s — верхняя и нижняя суммы Дарбу для выбранного способа разбиения области $\overline{D}$, а $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу разбиения области $\overline{D}$. Тогда $S = \sup\{\sigma\}$, а $s = \inf\{\sigma\}$.

3. С помощью произвольной сети простых кривых разобьём область $\overline{D}$ на частичные области $\overline{D}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть S и s — верхняя и нижняя суммы Дарбу, соответствующие выбранному способу разбиения области $\overline{D}$. Добавим к выбранной сети простых кривых ещё одну простую кривую, сохранив прежнюю сеть разбиения. В результате получим некоторый новый способ дробления области $\overline{D}$. Пусть, наконец, $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ — верхняя и нижняя суммы Дарбу, соответствующие этому новому способу разбиения области $\overline{D}$. Тогда выполняются два неравенства: $\tilde{S} \le S$, а $\tilde{s} \ge s$. Другими словами, при добавлении новых кривых дробления верхняя сумма Дарбу может лишь уменьшиться, а нижняя — может лишь увеличиться.

4. Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любую верхнюю сумму Дарбу, т. е. если $\{S\}$ — множество верхних, $\{s\}$ — множество нижних сумм Дарбу, соответствующих различным способам разбиения области $\overline{D}$, то для $\forall s \in \{s\}$ и для $\forall S \in \{S\}$ выполняется неравенство $s \le S$.

Теорема 2 (основной признак интегрируемости). Для того, чтобы функция $f(x, y)$, ограниченная в области $\overline{D}$, была интегрируема там, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$, где S и s — верхняя и нижняя суммы Дарбу для одного и того же способа разбиения области $\overline{D}$.

Теорема 3. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\overline{D}$, то она и интегрируема в этой области, т. е. если $f(x, y) \in C(\overline{D})$, то интеграл $\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\,dxdy$ существует.

Теорема 4. Пусть функция $f(x, y)$ ограничена в области $\overline{D}$ и непрерывна в этой области всюду, за исключением множества точек, лежащих на конечном числе простых кривых. Тогда интеграл $\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\,dxdy$ существует.

Примем все эти теоремы без доказательства. Отметим лишь, что их доказательства мало отличаются от доказательств соответствующих утверждений для определённого интеграла и могут быть найдены, например, в работах [1,4,5].

2.5. Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области

Пусть в прямоугольнике $\overline{P} = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ задана ограниченная функция $f(x,y)$. Предположим, что при каждом фиксированном значении $y \in [c,d]$ существует определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$. Так как определённый интеграл, если он существует, принимает единственное значение, то можно считать, что в этом случае на отрезке $[c,d]$ определена некоторая функция. Обозначим эту функцию через $\varphi(y)$, т. е. $\varphi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$. Предположим ещё, что существует определённый интеграл $\int\limits_c^d \varphi(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$. Интеграл, стоящий в правой части, принято обозначать символом $I_{\text{повт}} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$, и называют *повторным интегралом от функции* $f(x,y)$ *в прямоугольнике* $\overline{P}$.

Совершенно аналогично. Если при каждом закреплённом $x \in [a,b]$ существует интеграл $\psi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$, и функция $\psi(x) \in R\{[a,b]\}$, то интеграл $\int\limits_a^b \psi(x)dx = \tilde{I}_{\text{повт}} = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$ также называется *повторным интегралом от функции* $f(x,y)$ *в прямоугольнике* $\overline{P}$.

Пусть функция $f(x,y) \in R(\overline{P})$, кроме того существует $I_{\text{повт}}$ и требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy$. Так как двойной интеграл является пределом интегральной суммы, причём этот предел не зависит ни от способа разбиения прямоугольника $\overline{P}$ на части ни от способа выбора промежуточных точек в каждой частичной области, то при составлении интегральной суммы поступим следующим образом. Отрезками прямых $x = x_i \left(i = 0, 1, \ldots, n,\ x_0 = a,\ x_n = b\right)$, $y = y_k \left(k = 0, 1, \ldots, m,\ y_0 = c,\ y_m = d\right)$ разобьём прямоугольник $\overline{\mathrm{P}}$ на частичные прямоугольники $\overline{\mathrm{P}}_{ik} = \begin{cases} x_i \le x \le x_{i+1} \\ y_k \le y \le y_{k+1} \end{cases}$.

Положим $m_{ik} = \inf\limits_{\overline{P}_{ik}} \{f(x, y)\}$, а $M_{ik} = \sup\limits_{\overline{P}_{ik}} \{f(x, y)\}$. Тогда для любой точки $(x, y) \in \overline{P}_{ik}$ будет выполняться неравенство

$$m_{ik} \le f(x, y) \le M_{ik}. \tag{2.4}$$

Возьмём и зафиксируем какое-нибудь $y \in [y_k, y_{k+1}]$. Теперь проинтегрируем неравенство (2.4) по x в пределах от x_i до x_{i+1}. В результате получим

$$m_{ik}(x_{i+1} - x_i) \le \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \le M_{ik}(x_{i+1} - x_i). \tag{2.5}$$

Отметим, что интеграл, входящий в неравенство (2.5) существует, т. к. по условию существует $I_{\text{повт}}$.

Теперь просуммируем неравенства (2.5), считая, что во всех этих неравенствах, $y \in [y_k, y_{k+1}]$остаётся одним и тем же. Тогда получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \le \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1} - x_i). \tag{2.6}$$

Так как $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx = \int\limits_a^b f(x, y)dx$, а $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, то (2.6) может быть переписано в виде

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik} \Delta x_i \le \int\limits_a^b f(x, y)dx \le \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik} \Delta x_i. \tag{2.7}$$

Теперь неравенство (2.7) проинтегрируем по y в пределах от y_k до y_{k+1}, и просуммируем после этого все неравенства. В итоге получим,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} m_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \le \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx \le \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik} \Delta x_i \Delta y_k. \tag{2.8}$$

Так как произведение $\Delta x_i \Delta y_k$равно площади частичного прямоугольника $\overline{P}_{ik}$, то левая и правая части неравенства (2.8) представляют собой соответственно нижнюю s и верхнюю S суммы Дарбу. Следовательно, (2.8) можно переписать в виде

$$s \le \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \le S. \tag{2.9}$$

Так как $f(x,y) \in R(\overline{P})$, то справедливо и неравенство

$$s \le \iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy \le S. \tag{2.10}$$

Вычтем из (2.9) неравенство (2.10). Тогда получим

$$-(S-s) \le \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx - \iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy \le S-s. \tag{2.11}$$

Неравенство (2.11) означает, что

$$\left| \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx - \iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy \right| \le S-s.$$

Так как $f(x,y) \in R(\overline{P})$, то в соответствии с теоремой 2 (основной признак интегрируемости) $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$. Следовательно,

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy. \tag{2.12}$$

Совершенно аналогично устанавливается, что если функция $f(x,y) \in R(\overline{P})$, и существует повторный интеграл $\widetilde{I}_{\text{повт}}$, то

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy. \tag{2.13}$$

Замечание 1. Отметим, что если $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то одновременно выполняются соотношения (2.12) и (2.13), т. е.

$$\iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \tag{2.14}$$

Пример 2.1. Вычислить $\iint\limits_{\overline{P}} \frac{dxdy}{(x+y+5)^2}$, где $\overline{P} = \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$.

►Воспользуемся сначала (2.12). Имеем

$$\iint\limits_{\overline{P}} \frac{dxdy}{(x+y+5)^2} = \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+y+5)^2} = \int\limits_0^2 \left(-\frac{1}{x+y+5} \right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} dy =$$

$$= -\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{y+6} \right) dy = -\left(\ln|y+7| - \ln|y+6| \right)\Big|_0^2 =$$

$$= -\left(\ln 9 - \ln 8 - (\ln 7 - \ln 6) \right) = \ln \frac{28}{27}.$$

►Воспользуемся теперь (2.13). Имеем

$$\iint\limits_{P}\frac{dxdy}{(x+y+5)^2}=\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^2\frac{dy}{(x+y+5)^2}=\int\limits_1^2\left(-\frac{1}{x+y+5}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}dx=$$

$$=-\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+5}\right)dy=\left(\ln|x+5|-\ln|x+7|\right)\Bigg|_1^2=\ln\frac{28}{27}.$$

Замечание 2. Хотя соотношения (2.12) и (2.13), вообще говоря, равноправны, однако на практике выбор одной из этих формул часто определяется видом подынтегральной функции $f(x,y)$.

Пример 2.2. Вычислить $\iint\limits_{\overline{P}} y\cos(2xy)dxdy$, где $\overline{P}=\begin{cases}0{,}5\le x\le 1\\ 0{,}5\pi\le y\le\pi\end{cases}$.

►Воспользуемся сначала (2.12).

Имеем $\iint\limits_{\overline{P}} y\cos(2xy)dxdy=\int\limits_{0{,}5}^{1}dx\int\limits_{0{,}5\pi}^{\pi}y\cos(2xy)dy$. (2.15)

При вычислении внутреннего интеграла применим формулу интегрирования по частям.

$$\int\limits_{0{,}5\pi}^{\pi}y\cos(2xy)dy=\left|\begin{aligned}&u=y, du=dy\\&dv=\cos(2xy)dy\\&v=\frac{1}{2x}\sin(2xy)\end{aligned}\right|=\frac{y}{2x}\sin(2xy)\Bigg|_{y=0{,}5\pi}^{y=\pi}-\frac{1}{2x}\int\limits_{0{,}5\pi}^{\pi}\sin(2xy)dy=$$

$$=\frac{\pi}{2x}\left(\sin(2x\pi)-\frac{1}{2}\sin(x\pi)\right)+\frac{1}{4x^2}\left(\cos(2x\pi)-\cos(x\pi)\right).$$

После подстановки найденного значения внутреннего интеграла в повторный интеграл (2.15) получим интегралы вида $\int\frac{\sin(ax)}{x}dx$ и $\int\frac{\cos(ax)}{x^2}dx$, которые, как известно [2], на множестве элементарных функций «не берутся».

►Воспользуемся теперь (2.13). Имеем

$$\iint\limits_{\overline{P}} y\cos(2xy)dxdy = \int\limits_{0,5\pi}^{\pi} ydy\int\limits_{0,5}^{1}\cos(2xy)dx = \int\limits_{0,5\pi}^{\pi} y\left.\frac{\sin(2xy)}{2y}\right|_{x=0,5}^{x=1}dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0,5\pi}^{\pi}(\sin 2y-\sin y)dy=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2y+\cos y\Big|_{0,5\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(1+1)-1\right)=-1.$$

Как видно из рассмотренного примера, от правильного выбора одной из формул (2.12) или (2.13) может даже зависеть исход решения поставленной задачи.

2.6. Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области

Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в области $\overline{G}$, ограниченной линиями $x=a, x=b$ $(a<b)$, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, причём функции $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ являются непрерывными на отрезке $[a,b]$ и $\varphi(x)\le\psi(x)$, $x\in[a,b]$ (рис. 1).

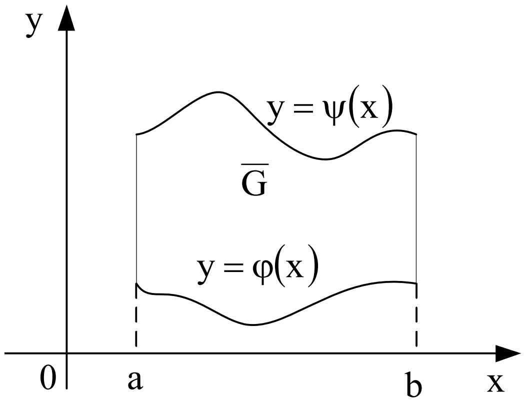

Рис. 1

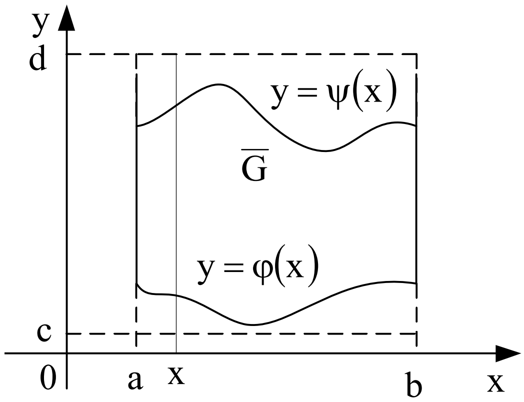

Рис. 2

Предположим, что при каждом фиксированном $x\in[a,b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, т. е. этот интеграл определяет на отрезке $[a,b]$ некоторую функцию $g(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$. Если эта функция интегрируема на отрезке $[a,b]$, т. е. существует интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$, то интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ принято называть *повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ в области $\overline{G}$.

Теорема. Если функция $f(x,y) \in R(\overline{G})$ и существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, то

$$\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (2.16)$$

Доказательство.

По условию функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, а, значит, и ограничены там. Поэтому найдутся такие числа c и d, что для любого $x \in [a,b]$ будет выполняться соотношение $c < \varphi(x) \le \psi(x) < d$. Построим прямоугольник $\overline{P} = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$. Очевидно, что $\overline{G} \subset \overline{P}$.

Теперь в прямоугольнике $\overline{P}$ определим вспомогательную функцию $h(x,y)$ соотношением

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \ (x,y) \in \overline{G} \\ 0, \ (x,y) \in \vec{P} \setminus \overline{G} \end{cases}. \qquad (2.17)$$

Ясно, что функция $h(x,y)$ ограничена и интегрируема в прямоугольнике $\overline{P}$ и, кроме того, в силу свойств двойного интеграла

$$\iint\limits_{\overline{P}} h(x,y)dxdy = \iint\limits_{\overline{G}} h(x,y)dxdy + \underbrace{\iint\limits_{\overline{P} \setminus \overline{G}} h(x,y)dxdy}_{=0} = \iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)dxdy + 0.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{\overline{P}} h(x,y)dxdy = \iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)dxdy. \qquad (2.18)$$

Возьмём любое $x \in [a,b]$ и зафиксируем его. Нетрудно заметить, что $[c,d] = [c,\varphi(x)] \cup [\varphi(x),\psi(x)] \cup [\psi(x),d]$ (рис. 2). Так как для функции $h(x,y)$ выполняется соотношение

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \ y \in [\varphi(x),\psi(x)] \\ 0, \ y \in [c,\varphi(x)] \cup [\psi(x),d] \end{cases}, \qquad (2.19)$$

то

$$\int\limits_c^d h(x,y)dy = \underbrace{\int\limits_c^{\varphi(x)} h(x,y)dy}_{=0} + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h(x,y)dy + \underbrace{\int\limits_{\psi(x)}^{d} h(x,y)dy}_{=0} = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_c^d h(x,y)dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (2.20)$$

Но тогда

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d h(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (2.21)$$

Функция $h(x,y)$ определена в прямоугольнике $\overline{P}$. Поэтому для неё справедливы соотношения (2.12) и (2.13) (см. п. 2.5). Значит,

$$\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\overline{P}} h(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d h(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$ ☻

Замечание 1. Аналогично устанавливается следующее. Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в области $\overline{G}$, ограниченной линиями $y=c,\ y=d\ (c<d),\ x=\alpha(y),\ x=\beta(y)$, причём функции $x=\alpha(y), x=\beta(y)$ являются непрерывными на отрезке $[c,d]$ и $\alpha(y)\le\beta(y),\ y\in[c,d]$. И пусть существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$. Тогда

$$\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dy. \qquad (2.22)$$

Предпочтение в практическом использовании формул (2.16) или (2.22), определяется, как это будет показано ниже на конкретных примерах, не только видом подынтегральной функции $f(x,y)$, но и формой области интегрирования $\overline{G}$.

Замечание 2. Если область интегрирования $\overline{G}$ не удовлетворяет требованиям, которые к ней предъявлялись при выводе формул (2.16) и (2.22), то необходимо предварительно разбить область $\overline{G}$ на части, для которых эти требования выполняются. В каждой части воспользоваться одним из соотношений (2.16) или (2.22), а затем применить свойство аддитивности двойного интеграла по области интегрирования (**свойство 8**).

Пример 2.3. Вычислить $\iint\limits_{\overline{G}} \left(2x^2 + 3y\right)dxdy$, где $\overline{G}$ — область, ограниченная параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$ (рис. 3).

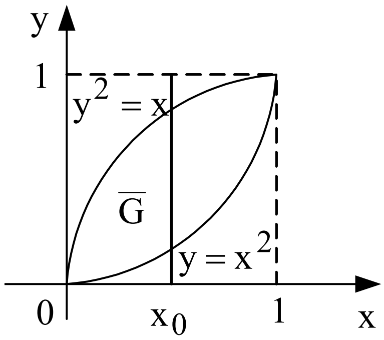

Рис. 3

►Найдём точки пересечения парабол:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow y = y^4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, параболы пересекаются в точках $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Сначала внешнее интегрирование произведём по x. В этом случае промежутком изменения x будет отрезок $[0,1]$. Возьмём произвольное значение $x_0 \in (0,1)$ и проведём прямую $x = x_0$. Двигаясь по этой прямой снизу вверх, видим (рис.3), что эта прямая сначала пересекает параболу $y = x^2$, а затем — $y^2 = x$. Следовательно, y изменяется от значения $y = x^2$ до значения $y = \sqrt{x}$. Поэтому

$$\iint\limits_{G} \left(2x^2 + 3y\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(2x^2 + 3y\right)dy = \int\limits_0^1 \left(2x^2 y + 1{,}5y^2\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^2\sqrt{x} + 1{,}5x - 2x^4 - 1{,}5x^4\right)dx = 2 \cdot \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10} = \frac{87}{140}.$$

Если внешнее интегрирование выполнять по y, то промежутком изменения y будет отрезок $[0, 1]$. Рассуждая так же, как это сделано выше, приходим к выводу, что x при этом будет изменяться от $x = y^2$ до $x = \sqrt{y}$. Следовательно,

$$\iint\limits_{\overline{G}}\left(2x^2+3y\right)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}}\left(2x^2+3y\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{2}{3}x^3+3yx\right)\Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{2}{3}\left(y^{\frac{3}{2}}-y^6\right)+3\left(y^{\frac{3}{2}}-y^3\right)\right)dy=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^7}{7}\right)+3\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\right)+3\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)=\frac{87}{140}.$$

Пример 2.4. Вычислить $\iint\limits_{\overline{G}}\frac{x}{y^2}dxdy$, где $\overline{G}$ — область, ограниченная прямыми $y=x$ и $x=2$ и гиперболой $xy=1$ (рис. 4).

►Вначале найдём точки пересечения двух прямых и каждой из прямых с гиперболой.

$$\begin{cases}y=x\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases},\ \begin{cases}xy=1\\y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases},\ \begin{cases}xy=1\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0{,}5\end{cases}.$$

Таким образом, прямые $y=x$ и $x=2$ пересекаются в точке $(2,2)$, прямая $y=x$ и гипербола $xy=1$ пересекаются в точке $(1,1)$, а прямая $x=2$ и гипербола $xy=1$ пересекаются в точке $(2;0{,}5)$.

Построим область интегрирования.

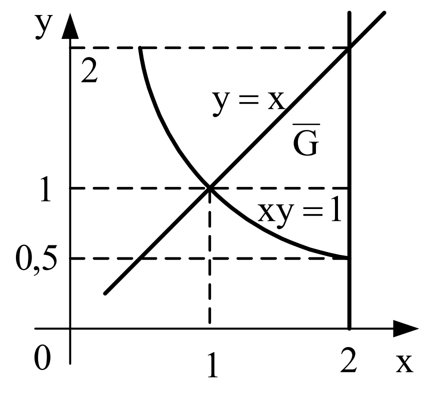

Рис. 4

1. Если внешнее интегрирование производить по x, то промежутком изменения x будет отрезок $[1,2]$. Из рис. 4 видно, что y при этом изменяется от $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ до $y=x$.

Следовательно, получим

$$\iint\limits_{\overline{G}}\frac{x}{y^2}dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{x^{-1}}^{x}\frac{x}{y^2}dy=-\int\limits_1^2\frac{x}{y}\Bigg|_{y=x^{-1}}^{y=x}dx=-\int\limits_1^2\left(1-x^2\right)dx=-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=-\left(2-\frac{8}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

2. Теперь внешнее интегрирование будем производить по y. Так как левая граница области $\overline{G}$ состоит из двух частей: отрезка гипербо-

лы $xy=1$, когда y изменяется от $0,5$ до 1, и отрезка прямой $y=x$, при $y\in[1,2]$, то имеем

$$\iint\limits_G \frac{x}{y^2}dxdy = \int\limits_{0,5}^{1} dy \int\limits_{y^{-1}}^{2} \frac{x}{y^2}dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} \frac{x}{y^2}dx = I_1 + I_2. \qquad (2.23)$$

$$I_1 = \int\limits_{0,5}^{1} \frac{x^2}{2y^2}\Bigg|_{x=y^{-1}}^{x=2} dy = \int\limits_{0,5}^{1} \frac{1}{2y^2}\left(4-y^{-2}\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0,5}^{1}\left(\frac{4}{y^2}-y^{-4}\right)dy =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{y}+\frac{y^{-3}}{3}\right)\Bigg|_{0,5}^{1} = \frac{1}{2}\left(\left(-4+\frac{1}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right)=\frac{5}{6}.$$

$$I_2 = \int\limits_{1}^{2} \frac{x^2}{2y^2}\Bigg|_{x=y}^{x=2} dy = \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{2y^2}\left(4-y^2\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{4}{y^2}-1\right)dy =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{y}-y\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{1}{2}\left((-2-2)-(-4-1)\right)=\frac{1}{2}.$$

Подставим теперь найденные значения I_1 и I_2 в (2.23). Получим

$$\iint\limits_G \frac{x}{y^2}dxdy = \frac{4}{3}.$$

Сравнивая решения примеров 2.3 и 2.4, можем сделать следующее заключение. Вычисление двойного интеграла в примере 2.3 по формулам (2.16) и (2.22) было одинаково простым. В примере 2.8 вычисление интеграла по формуле (2.22) было сложнее и более трудоёмким. Эта разница объясняется именно конфигурацией области интегрирования. Понятно, что из двух возможных путей вычисления двойного интеграла, естественно, следует выбирать более простой.

Для приобретения навыков в расстановке пределов интегрирования в случае криволинейной области выполним несколько полезных упражнений.

Пример 2.5. Изменить порядок интегрирования [6]

а) $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$

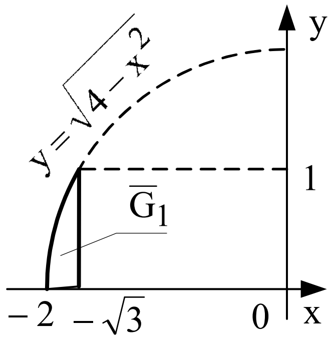

Рис. 5

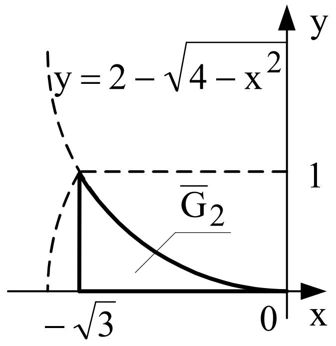

Рис. 6

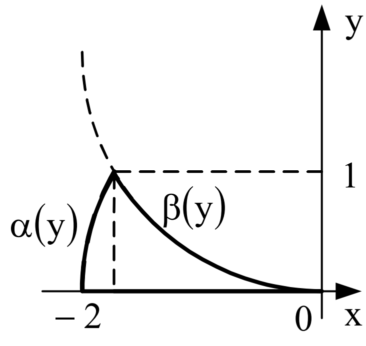

Рис. 7

► Пусть $\overline{G}_1$ — область, соответствующая первому, а $\overline{G}_2$ — второму повторному интегралу.

Сначала построим область $\overline{G}_1$. Она задаётся системой неравенств $\left\{-2 \le x \le -\sqrt{3}, 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$. Значит, эта область находится в полосе $-2 \le x \le -\sqrt{3}$ и снизу ограничена прямой $y = 0$, а сверху линией $y = \sqrt{4-x^2}$. Возведя обе части последнего соотношения в «квадрат», получим $y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ — окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Следовательно, уравнение $y = \sqrt{4-x^2}$, задаёт верхнюю полуокружность этой окружности. Область $\overline{G}_1$ изображена на рис. 5.

Перейдём к построению области $\overline{G}_2$. Она задаётся системой неравенств $\left\{-\sqrt{3} \le x \le 0, 0 \le y \le 2 - \sqrt{4-x^2}\right\}$. Эта область находится в полосе $-\sqrt{3} \le x \le 0$ и снизу ограничена прямой $y = 0$, а сверху нижней полуокружностью радиуса 2 с центром в точке $(0, 2)$. Область $\overline{G}_2$ изображена на рис. 6.

Построив обе области $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ на одной плоскости, замечаем, что они «склеиваются» по прямой $x = -\sqrt{3}$ (рис. 7).

Анализ рис. 7 показывает, что область интегрирования может быть задана соотношениями $\{0 \le y \le 1,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$. Из уравнений полуокружностей выразим x и найдем, что $x = \alpha(y) = -\sqrt{4-y^2}$, а $x = \beta(y) = -\sqrt{4y-y^2}$.

Следовательно,

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx .$$

Пример 2.6. Изменить порядок интегрирования [6]

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx .$$

► Пусть $\overline{D}_1$ — область, соответствующая первому, а $\overline{D}_2$ — второму повторному интегралу.

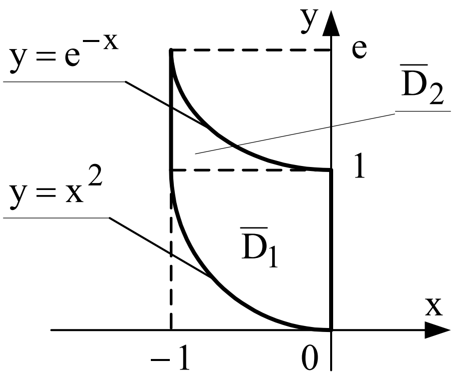

Рис. 8

Область $\overline{D}_1$ задаётся системой неравенств

$$\{0 \le y \le 1,\ -\sqrt{y} \le x \le 0\}.$$

Из соотношения $-\sqrt{y}=x$ находим: $y=x^2$, а поскольку $-\sqrt{y} \le x \le 0$, то нас интересует только левая ветвь этой параболы. Чтобы выполнялось неравенство $0 \le y \le 1$, переменная x должна принимать значения из отрезка $[-1, 0]$. Область $\overline{D}_2$ задаётся системой неравенств $\{1 \le y \le e,\ -1 \le x \le -\ln y\}$. Из соотношения $x=-\ln y$ следует, что $y=e^{-x}$. Чтобы выполнялось неравенство $1 \le y \le e$, переменная x должна принимать значения из отрезка $[-1, 0]$. Таким образом, область интегрирования может быть задана неравенствами $\left\{-1 \le x \le 0,\ x^2 \le y \le e^{-x}\right\}$ (рис. 8).

Поэтому можно воспользоваться формулой (2.16)

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f(x,y)dy .$$

Пример 2.7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле [3]

$$\int_{0}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0).$$

► Область интегрирования $\overline{D}$ определяется системой неравенств $\left\{0 \le x \le 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax}\right\}$ и изображена на рис. 9.

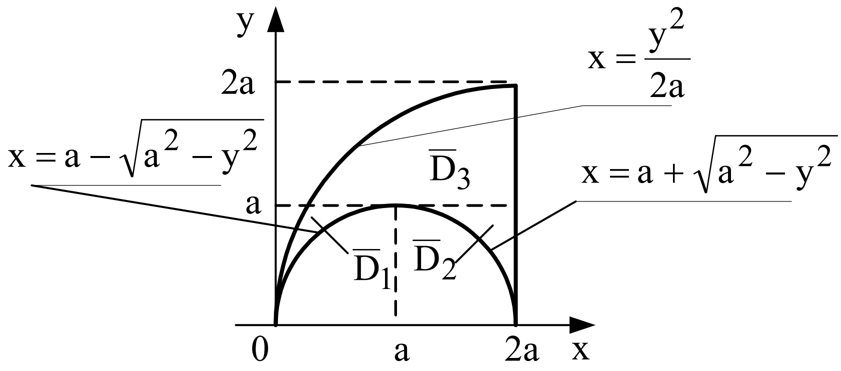

Рис. 9

Если внешнее интегрирование производить по переменной y, то область $\overline{D}$ необходимо разбить линией $y = a$ на три части $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, и $\overline{D}_3$. Эти частичные области задаются неравенствами:

$$\overline{D}_1 = \begin{cases} 0 \le y \le a \\ \dfrac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases},$$

$$\overline{D}_2 = \begin{cases} 0 \le y \le a \\ a + \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le 2a \end{cases},$$

$$\overline{D}_3 = \begin{cases} a \le y \le 2a \\ \dfrac{y^2}{2a} \le x \le 2a \end{cases}.$$

Поэтому

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy = \int_0^{a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x,y)dx +$$

$$+ \int_0^{a} dy \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

Иногда при вычислении двойных интегралов приходится разбивать область интегрирования на части не из-за формы области интегрирования, а из-за подынтегральной функции. В этом отношении очень поучительным является следующие примеры.

Пример 2.8. Вычислить $\iint\limits_{\overline{G}} |xy| dxdy$, где $\overline{G}$ — круг радиуса a с центром в начале координат [3] (рис. 10).

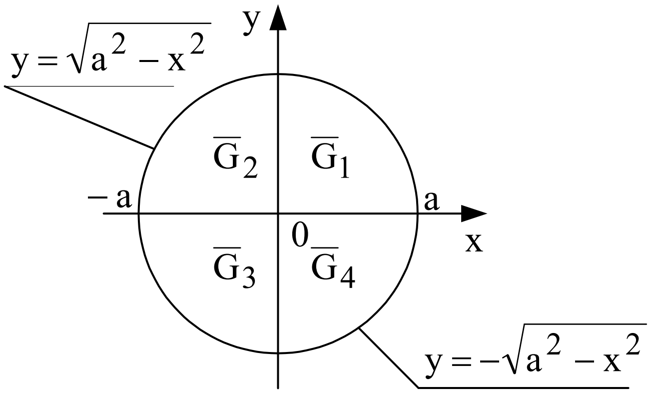

Рис. 10

► Верхней границей области интегрирования $\overline{G}$ является полуокружность, уравнение которой $y=\sqrt{a^2-x^2}$, а нижней границей — полуокружность, уравнение которой $y=-\sqrt{a^2-x^2}$. В секторе $\overline{G}_1$ промежутком изменения x является отрезок $[0, a]$, а y изменяется от $y=0$ до $y=\sqrt{a^2-x^2}$. При этом произведение $xy \ge 0 \Rightarrow |xy| = xy$. Аналогично. В секторе $\overline{G}_2$ промежутком изменения x является отрезок $[-a, 0]$, y изменяется в пределах от $y=0$ до $y=\sqrt{a^2-x^2}$, а $xy \le 0 \Rightarrow |xy| = -xy$. В секторе $\overline{G}_3$ промежутком изменения x является отрезок $[-a, 0]$, y изменяется от $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ до $y=0$, а $xy \ge 0 \Rightarrow |xy| = xy$. Наконец, в секторе $\overline{G}_4$ промежутком изменения x является отрезок $[0, a]$, y изменяется от $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ до $y=0$, а $xy \le 0 \Rightarrow |xy| = -xy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{\overline{G}} |xy| dxdy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \sum_{k=1}^{4} \iint\limits_{\overline{G}_k} |xy| dxdy. \qquad (2.24)$$

Имеем

$$I_1 = \iint\limits_{\vec{G}_1} |xy| dxdy = \int_0^a x dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy = \frac{1}{2}\int_0^a xy^2 \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x\left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^4}{8}.$$

$$I_2 = \iint\limits_{\vec{G}_2} |xy| dxdy = -\int\limits_{-a}^{0} xdx \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{a} xy^2 \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{0} x\left(a^2 - x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-a}^{0} = \frac{a^4}{8}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{I}_3 = \iint\limits_{\vec{G}_3} |xy| dxdy = \int\limits_{-a}^{0} xdx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{0} ydy = \frac{a^4}{8}.$$

$$\mathrm{I}_4 = \iint\limits_{\vec{G}_4} |xy| dxdy = -\int\limits_{0}^{a} xdx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{0} ydy = \frac{a^4}{8}.$$

Подставив найденные значения I_k, $k = 1,2,3,4$ в (2.24), получим

$$\iint\limits_{\overline{G}} |xy| dxdy = \frac{a^4}{2}.$$

Пример 2.9. Вычислить $\iint\limits_{\overline{D}} |\sin(x+y)| dxdy$, где $\overline{D} = \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$.

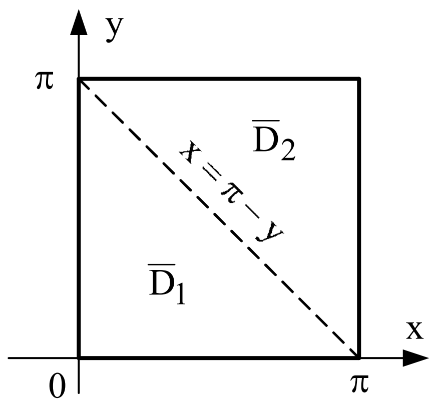

Рис. 11

►Так как если $\sin(x+y) \ge 0$, то $2\pi n + 0 \le x + y \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. При $n = 0$ получаем область, определяемую неравенствами: $0 \le x + y \le \pi$. Пересечение этой области с прямоугольником $\overline{D}$ является треугольная область

$$\overline{D_1} = \{0 \le y \le \pi,\ 0 \le x \le \pi - y\}.$$

Аналогично $\sin(x+y) \le 0$ в треугольнике $\overline{D_2} = \{0 \le y \le \pi,\ \pi - y \le x \le \pi\}$ (рис. 11).

Таким образом,

$$\iint\limits_{\overline{D}} |\sin(x+y)| dxdy \iint\limits_{\overline{D}_1} |\sin(x+y)| dxdy + \iint\limits_{\overline{D}_2} |\sin(x+y)| dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\overline{D_1}} \sin(x+y) dxdy - \iint\limits_{\overline{D_2}} \sin(x+y) dxdy =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} dy \int\limits_{0}^{\pi-y} \sin(x+y) dx - \int\limits_{0}^{\pi} dy \int\limits_{\pi-y}^{\pi} \sin(x+y) dx = I_1 + I_2.$$

Имеем,

$$I_2 = -\int_0^{\pi} dy \int_{\pi-y}^{\pi} \sin(x+y)dx = \int_0^{\pi} \cos(x+y)\Big|_{x=\pi-y}^{x=\pi} dy =$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos(\pi+y) - \cos(\pi))dy = \int_0^{\pi} (1-\cos y)dy = y - \sin y\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Аналогично,

$$I_1 = \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi-y} \sin(x+y)dx = -\int_0^{\pi} \cos(x+y)\Big|_{x=0}^{x=\pi-y} dy =$$

$$= -\int_0^{\pi} (\cos(\pi) - \cos(y))dy = -\int_0^{\pi} (-1-\cos y)dy = y + \sin y\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Следовательно,

$$\iint_{\overline{D}} |\sin(x+y)| dxdy = I_1 + I_2 = 2\pi.$$

3. Замена переменных интегрирования в двойном интеграле

3.1. Отображение областей. Элемент площади в криволинейных координатах

Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами x, y и u, v соответственно. Пусть в плоскости $0xy$ задана область $\overline{D}$, ограниченная простым замкнутым контуром L, а в плоскости $0uv$ — область $\overline{G}$, ограниченная простым замкнутым контуром Γ (рис. 12).

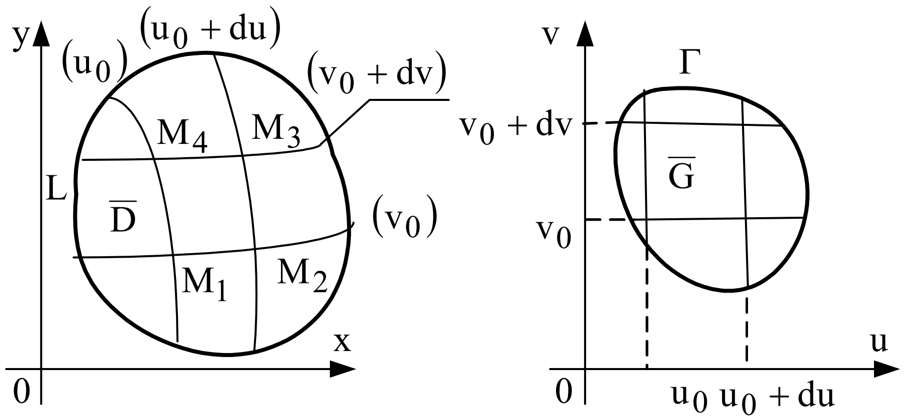

Рис. 12

Далее предположим, что в области $\overline{G}$ задана пара функций

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}. \tag{3.1}$$

Сделаем несколько предположений относительно свойств системы (3.1).

1) Пара функций (3.1) однозначно отображает область $\overline{G}$ на область $\overline{D}$. Это означает следующее. Если точка (u, v) «пробегает» область $\overline{G}$, то соответствующая точка $(x(u, v),\ y(u, v)) = (x, y)$ «пробегает» область $\overline{D}$. При этом различным точкам (u, v) из области $\overline{G}$ отвечают различные же точки (x, y) из области $\overline{D}$. Кроме того, точкам, лежащим на границе Γ области $\overline{G}$, соответствуют точки, принадлежащие границе L области $\overline{D}$.

2) Отображение (3.1) взаимно однозначное. Это означает следующее. Система (3.1) может быть разрешена относительно u и v, т. е. из (3.1) можно получить

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}. \tag{3.2}$$

причём пара функций (3.2) однозначно отображает область $\overline{D}$ вместе с её границей L на область $\overline{G}$ с границей Γ.

3) Функции (3.1) и (3.2) непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

4) Функциональный определитель Остроградского — Якоби (якобиан)

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

в области $\overline{G}$ отличен от нуля.

Возьмём в области $\overline{G}$ прямую $u = u_0$. В области $\overline{D}$ ей отвечает кривая, в общем случае, линия, определённая параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \end{cases}. \tag{3.4}$$

Аналогично, прямой $v = v_0$ области $\overline{G}$ соответствует кривая в области $\overline{D}$, определяемая уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \end{cases}. \tag{3.5}$$

Из взаимной однозначности отображений (3.1) и (3.2) следует, что через каждую точку $(x, y) \in \overline{D}$ проходит только одна линия вида

(3.4) и одна линия вида (3.5). Поэтому линии (3.4) и (3.5) области $\overline{\mathrm{D}}$, в которые отображение (3.1) переводит прямые из области $\overline{\mathrm{G}}$, параллельные осям $0\mathrm{u}$ и $0\mathrm{v}$, называются *координатными линиями* u *и* v *в области* $\overline{\mathrm{D}}$*,* а числа u_0 *и* v_0 принято называть *криволинейными координатами точки* $(x, y) \in \overline{D}$*,* лежащей на пересечении линий (3.4) и (3.5).

Рассмотрим в области $\overline{\mathrm{G}}$ прямоугольник, образованный двумя парами бесконечно близких прямых $u = u_0,\ u = u_0 + du$ и $v = v_0,\ v = v_0 + dv$ (для определённости будем считать, что $\mathrm{du} > 0$ и $\mathrm{dv} > 0$). В области $\overline{\mathrm{D}}$ этим прямым соответствуют две пары бесконечно близких координатных линий $(u_0), (u_0 + du)$ и $(v_0), (v_0 + dv)$, которые вырежут в области $\overline{\mathrm{D}}$ криволинейный четырёхугольник $\mathrm{M_1M_2M_3M_4}$ (рис.12). Обозначим через $(\mathrm{x_k}, \mathrm{y_k})$ координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4, т. е. $M_k(x_k, y_k),\quad k = 1, 2, 3, 4$. Эти точки лежат на пересечении координатных линий, поэтому:

$$\mathrm{x_1 = x(u_0, v_0),\ y_1 = y(u_0, v_0)};$$

$$\mathrm{x_2 = x(u_0 + du, v_0) = x_1 + \frac{\partial x}{\partial u}du,\ y_2 = y(u_0 + du, v_0) = y_1 + \frac{\partial y}{\partial u}du};$$

$$\mathrm{x_3 = x(u_0 + du, v_0 + dv) = x_1 + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv};$$

$$\mathrm{y_3 = y(u_0 + du, v_0 + dv) = y_1 + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv};$$

$$\mathrm{x_4 = x(u_0, v_0 + dv) = x_1 + \frac{\partial x}{\partial v}dv,\ y_4 = y(u_0, v_0 + dv) = y_1 + \frac{\partial y}{\partial v}dv}.$$

Отметим, что выражения для координат точек $M_k(x_k, y_k),\quad k = 1, 2, 3, 4$ выполняются с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем du и dv.

Рассмотрим векторы $\overline{\mathrm{M_1M_2}}$, $\overline{\mathrm{M_4M_3}}$, $\overline{\mathrm{M_1M_4}}$ и $\overline{\mathrm{M_2M_3}}$. Найдём координаты этих векторов, для чего из координат конца вектора вычтем координаты его начала $[7]$. Получим

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial u}du\right);$$

$$\overline{M_4M_3} = (x_3 - x_4, y_3 - y_4) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial u}du\right);$$

$$\overline{M_1M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}dv, \frac{\partial y}{\partial v}dv\right);$$

$$\overline{M_2M_3} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}dv, \frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Как видим $\overline{M_1M_2} = \overline{M_4M_3}$, а $\overline{M_1M_4} = \overline{M_2M_3}$. Следовательно, четырёхугольник $M_1M_2M_3M_4$ является параллелограммом. Площадь параллелограмма численно равна модулю векторного произведения векторов, на которых как на сторонах построен этот параллелограмм $[7]$. Таким образом, имеем

$$\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_4} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}du & \dfrac{\partial y}{\partial u}du & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}dv & \dfrac{\partial y}{\partial v}dv & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}\, J(u,v)dudv$$

$$S_{M_1M_2M_3M_4} = \left|\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_4}\right| = |J(u,v)|dudv. \qquad (3.6)$$

3.2. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\overline{D}$, ограниченной простым замкнутым контуром L, и существует двойной интеграл

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy. \qquad (3.7)$$

Пусть пара функций (3.1) взаимно однозначно отображает область $\overline{G}$ на область $\overline{D}$. Тогда в соответствии с (3.6)

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\overline{G}} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv. \qquad (3.8)$$

Замечание. При сведении интеграла, стоящего в правой части соотношения (3.8), к повторному интегралу на практике часто не выполняют преобразование области $\overline{D}$ в область $\overline{G}$, а поступают следующим образом. Совмещают начала двух систем координат: $0xy$ и $0uv$, а затем исследуют закон изменения u и v точек $M(u,v)$ при их отождествлении с точками области $\overline{D}$. Если же это сделать сложно, то необходимо изобразить область $\overline{G}$ в системе координат $0uv$.

3.3. Двойной интеграл в полярных координатах

Напомним, что всякую точку M на плоскости можно однозначно задать с помощью её полярных координат. Под полярными координатами точки M понимают расстояние ρ от этой точки до начала координат и угол φ, который образует луч, проходящий через точку M и начало координат, с положительным направлением оси $0x$. Таким образом, $\rho \in [0, +\infty)$, а $\varphi \in [0, 2\pi)$, причём положительным считается отсчёт угла φ от оси $0x$ против часовой стрелки (рис. 13).

Соотношения, связывающие декартовы и полярные координаты точки M, имеют вид:

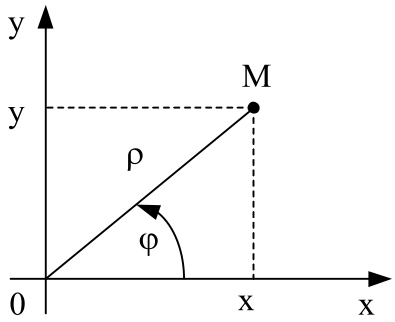

Рис. 13

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \qquad (3.9)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}. \qquad (3.10)$$

Имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi \Rightarrow$$

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\overline{G}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \qquad (3.11)$$

Пример 3.1. Перейти к полярным координатам и вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy,$$

где область $\overline{D}$ — круг $x^2 + y^2 \le ax,\ (a > 0)$.

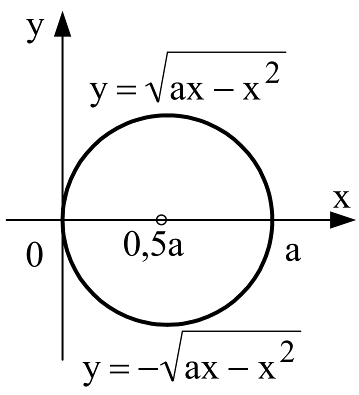

Рис. 14

►Область $\overline{D}$ изображена на рис. 14. Из рисунка видно, что $x \in [0, a]$, а y при этом изменяется от $y = -\sqrt{ax - x^2}$ до $y = \sqrt{ax - x^2}$.

Следовательно,

$$\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy=$$

$$=2\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy.$$

При вычислении интеграла $\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy$ приходится применять или тригонометрическую подстановку, или использовать формулу интегрирования по частям. И в том и в другом случае это достаточно трудоёмко. Значительно проще получится решение, если перейти к полярным координатам.

Подставим в уравнение окружности $x^2+y^2=ax$ соотношения (3.9). В результате получим уравнение этой окружности в полярных координатах: $\rho=a\cos\varphi$. По рис. 14 определяем, что $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, а ρ при этом изменяется от $\rho=0$ до $\rho=a\cos\varphi$. В соответствии с формулой (3.11) и замечанием в п. 3.2. имеем

$$\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho. \tag{3.12}$$

При вычислении внутреннего интеграла в (3.12) сделаем замену $a^2-\rho^2=t$. Тогда $dt=-2\rho d\rho,\ t\in\left[a^2,a^2\sin^2\varphi\right]$. Так как $a>0$, а $\sin\varphi$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, если $\varphi\in[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\varphi]$, то $\left(a^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}=a^3|\sin\varphi|^3$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{a^2\sin^2\varphi}\sqrt{t}\,dt=-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{a^2}^{a^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{3}a^3\left(1-|\sin\varphi|^3\right).$$

Теперь подставляем найденное значение внутреннего интеграла в (3.12).

$$\iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \frac{1}{3}a^3 \int\limits_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \left(1 - |\sin\varphi|^3\right) d\varphi = \left| \begin{matrix} 1 - |\sin\varphi|^3 \\ \textit{чётная} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \int\limits_{0}^{0,5\pi} \left(1 - \sin^3\varphi\right) d\varphi = \frac{2}{3}a^3 \left(\varphi \Big|_0^{0,5\pi} - \int\limits_{0}^{0,5\pi} \sin^2\varphi \sin\varphi d\varphi \right) =$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \left(\frac{\pi}{2} + \int\limits_{0}^{0,5\pi} \left(1 - \cos^2\varphi\right) d(\cos\varphi) \right) = \frac{2}{3}a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

3.4. Специфика применения полярной системы координат при вычислении двойных интегралов

Переход к полярным координатам при вычислении двойных интегралов особенно целесообразен, если область интегрирования является или областью *секторного типа* или областью *радиального типа*, или может быть разбита на несколько областей указанных типов.

Область *секторного типа* представлена на рис. 15. Для такой области характерными являются следующие особенности:

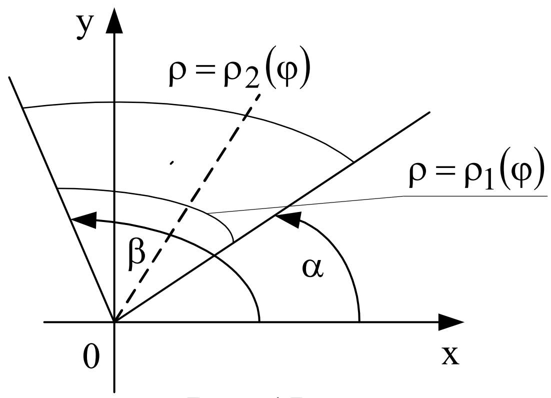

Рис. 15

1) область заключена между двумя лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta\ \ (\alpha < \beta)$;

2) при всяком фиксированном значении $\varphi \in [\alpha,\ \beta]$ луч пересекает границу области не более чем в двух точках;

3) заданы уравнения граничных линий $\rho = \rho_1(\varphi),\ \rho = \rho_2(\varphi)$, причём $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$.

В этом случае

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (3.13)$$

Область *радиального типа* представлена на рис. 16. Эта область ограничена:

1) двумя концентрическими окружностями с постоянными радиусами ρ_1 и ρ_2, $(\rho_1 < \rho_2)$;

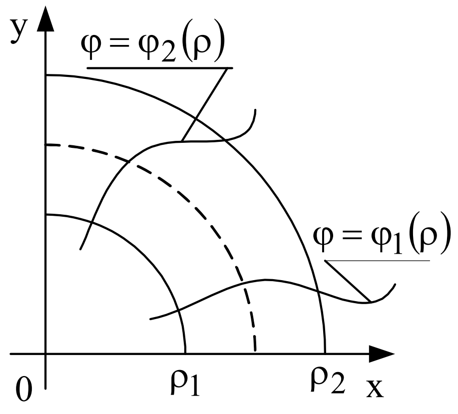

Рис. 16

2) двумя линиями, уравнения которых могут быть записаны в виде $\varphi=\varphi_1(\rho)$, $\varphi=\varphi_2(\rho)$, при этом
$\varphi_1(\rho)\le\varphi_2(\rho)$ при $\forall\rho\in[\rho_1,\rho_2]$;

3) дуга окружности любого фиксированного радиуса $\rho\in[\rho_1,\rho_2]$ пересекает каждую из линий $\varphi=\varphi_1(\rho)$, $\varphi=\varphi_2(\rho)$ не более чем в одной точке.

В этом случае

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\rho d\rho\int\limits_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\varphi. \qquad (3.14)$$

Пример 3.2. Предполагая, что ρ и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

1). $\int\limits_0^{0,5\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}f(\rho,\varphi)d\rho\quad(a>0)$.

► Из уравнения $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$ находим:

$$\sin 2\varphi=\frac{\rho^2}{a^2}\Rightarrow\varphi=\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}+\pi n\right). \qquad (3.15)$$

По условию $\varphi\in[0;0,5\pi]$. Подставляя в (3.15) $n=0$ и $n=1$, получаем $\varphi_1(\rho)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}$, а $\varphi_2(\rho)=\frac{1}{2}\left(\pi-\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}\right)$. Наибольшее значение, которого может достичь полярный радиус ρ, получается из уравнения $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$ при $\varphi=\frac{\pi}{4}$, и равно a.

Теперь воспользуемся соотношением (3.14). Следовательно,

$$\int\limits_0^{0,5\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}f(\rho,\varphi)d\rho=\int\limits_0^{a}d\rho\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\left(\pi-\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}\right)}f(\rho,\varphi)d\varphi.$$

2). $\int\limits_0^{a}d\varphi\int\limits_0^{k\varphi}f(\rho,\varphi)d\rho\quad(0<a<2\pi,\ k>0)$.

►Анализируя пределы интегрирования, замечаем, что область интегрирования ограничена лучами $\varphi = 0, \varphi = a$ и отрезком правой спирали Архимеда $\rho = k\varphi$, заключённым между этих лучей, т. е. является областью секторного типа. При $\varphi = a$ полярный радиус ρ принимает наибольшее значение $\rho = ka$. Одновременно область интегрирования можно считать областью радиального типа, которая ограничена дугами окружностей $\rho = 0$, $\rho = ka$ и линиями $\varphi = \varphi_1(\rho) = \frac{\rho}{k}$ и $\varphi = \varphi_2(\rho) = a$. Следовательно,

$$\int_0^a d\varphi \int_0^{k\varphi} f(\rho,\varphi) d\rho = \int_0^{ka} d\rho \int_{\frac{\rho}{k}}^{a} f(\rho,\varphi) d\varphi .$$

Пример 3.3. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в интеграле [3]:

$$\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy .$$

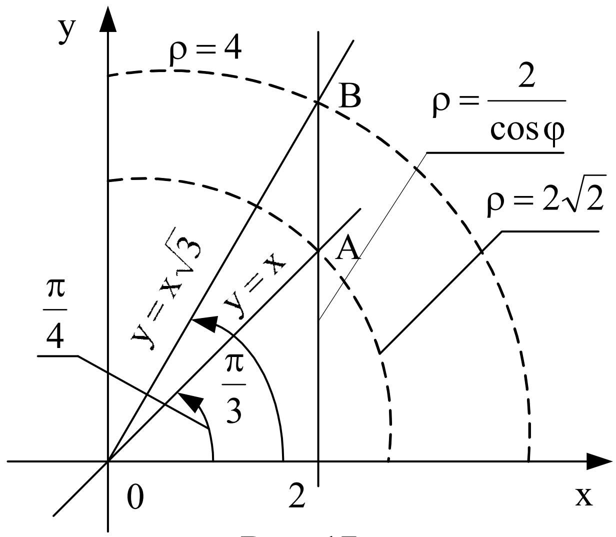

Рис. 17

►Область интегрирования ограничена прямыми $x = 2$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$ и изображена на рис. 17. Воспользуемся соотношениями (3.9). В полярных координатах уравнение прямой $x = 2$ принимает вид $\rho\cos\varphi = 2$ или $\rho = \frac{2}{\cos\varphi}$. Аналогично, уравнения прямых $y = x$ и $y = x\sqrt{3}$ преобразуются в уравнения $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$ соответственно, а $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$. Якобиан $J(\rho,\varphi) = \rho$. В соответствии с (3.13) получаем

$$\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} \rho f(\rho) d\rho . \qquad (3.16)$$

Теперь изменим порядок интегрирования в правой части (3.16). Пусть А — точка пересечения прямых $y = x$ и $x = 2$. Тогда $0A = \dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$. Пусть В — точка пересечения прямых $y = x\sqrt{3}$ и $x = 2$. Тогда $OB = \dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{3}} = 4$. Через точки А и В проведём дуги окружностей $\rho = 2\sqrt{2}$ и $\rho = 4$ соответственно. Эти дуги разобьют область интегрирования на две области радиального типа. Одна из радиальных областей ограничена окружностями $\rho = 0$ и $\rho = 2\sqrt{2}$ и линиями $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, а вторая — окружностями $\rho = 2\sqrt{2}$ и $\rho = 4$ и линиями $\cos\varphi = \dfrac{2}{\rho} \Rightarrow \varphi = \arccos\dfrac{2}{\rho}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} \rho f(\rho)d\rho = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho)d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi +$$

$$+ \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} \rho f(\rho)d\rho \int\limits_{\arccos\frac{2}{\rho}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{12}\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho)d\rho + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{\rho}\right)\rho f(\rho)d\rho.$$

Пример 3.4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\overline{G}} \sqrt{xy}\,dxdy$, где $\overline{G}$ — область, ограниченная линией $\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3}\right)^4 = \dfrac{xy}{\sqrt{6}}$ и лежащая в первом квадранте.

►Введём *обобщённые полярные координаты* с помощью соотношений

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y = \sqrt{3}\rho\sin\varphi \end{cases}. \tag{3.17}$$

Тогда

$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-\sqrt{2}\rho\sin\varphi$; $\frac{\partial x}{\partial \rho}=\sqrt{2}\cos\varphi$; $\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\sqrt{3}\rho\cos\varphi$; $\frac{\partial y}{\partial \rho}=\sqrt{3}\sin\varphi$, а определитель Остроградского — Якоби $J=\begin{vmatrix}\sqrt{2}\cos\varphi & \sqrt{3}\sin\varphi\\ -\sqrt{2}\rho\sin\varphi & \sqrt{3}\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\sqrt{6}$.

Уравнение линии, ограничивающей область $\overline{G}$, принимает вид $\left(\frac{2\rho^2\cos^2\varphi}{2}+\frac{3\rho^2\sin^2\varphi}{3}\right)^4=\frac{\sqrt{6}\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{6}}\Rightarrow\rho=\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}$. В первом квадранте плоскости $0xy$ эта линия является петлёй, исходящей из начала координат и не имеющей самопересечений. Следовательно,

$$\iint\limits_{\overline{G}}\sqrt{xy}\,dxdy=6^{\frac{3}{4}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi\int\limits_0^{\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}}\rho^2d\rho=$$

$$=6^{\frac{3}{4}}\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi=6^{\frac{3}{4}}\frac{1}{3}\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$$

Замечание. Вычисление этого интеграла в декартовых координатах представляет весьма серьёзные трудности, в чём предлагаем внимательному читателю убедиться самостоятельно.

С целью более глубокого понимания замены переменных интегрирования в двойном интеграле рассмотрим еще три примера.

Пример 3.5. С помощью соотношений $u=x+y, uv=y$ ввести новые переменные u и v и преобразовать повторный интеграл $\int\limits_0^c dx\int\limits_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)dy, (c>0,\ 0<\alpha<\beta)$ [8].

►Из соотношений $u=x+y,\ uv=y$ легко получаем: $x=u-uv, y=uv$. Найдём определитель Остроградского — Якоби:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-v & v\\ -u & u\end{vmatrix}=u.$$

Область интегрирования представляет треугольник, ограниченный прямыми $y=\alpha x, y=\beta x, x=c$ и показана на рис. 18. Точке $(0,0)$ — началу декартовой системы координат $0xy$, соответствует прямая $u=0$ в системе декартовых координат $0uv$, прямой $x=c$ — отвечает гипербола $u=\frac{c}{1-v}$. Теперь найдём линии, в которые отображаются прямые $y=\alpha x$ и $y=\beta x$.

Имеем $y=uv=\alpha x=u-uv \Rightarrow v=\frac{\alpha}{\alpha+1}$. Уравнению $v=\frac{\alpha}{\alpha+1}$ в плоскости $0uv$ соответствует прямая, параллельная оси $0u$. Аналогично, прямая $y=\beta x$ отображается также на прямую, параллельную оси $0u: v=\frac{\beta}{\beta+1}$. Таким образом, в системе декартовых координат $0uv$ область интегрирования является криволинейной трапецией, изображённой на рис. 19.

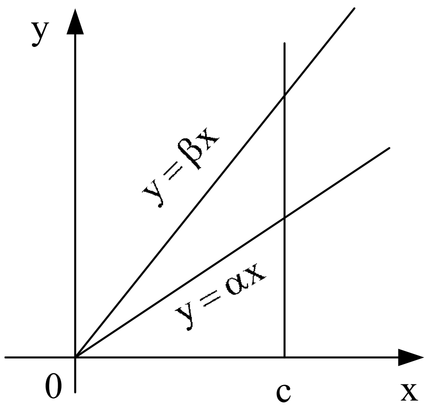

Рис. 18

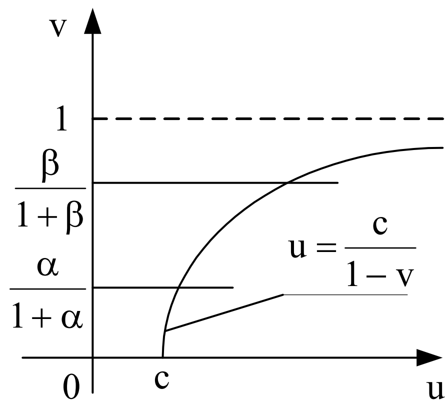

Рис. 19

Следовательно,

$$\int_0^c dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy = \int_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}^{\frac{\beta}{\beta+1}} dv \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv)udu .$$

Пример 3.6. Выполнить замену переменных $u=x+y$, $v=x-y$ в интеграле $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$.

► Областью интегрирования в декартовой системе координат $0xy$ является квадрат со сторонами $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$. Из соотношений $u=x+y$, $v=x-y$ находим: $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$.

Найдём определитель Остроградского — Якоби:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\Rightarrow |J(u,v)|=\frac{1}{2}.$$

Сторона квадрата $x=0$ на плоскости $0uv$ отображается на прямую $v=-u$, сторона $x=1$ — на прямую $v=2-u$, сторона $y=0$ — на прямую $v=u$ и, наконец, сторона $y=1$ — на прямую $v=u-2$. Следовательно, на координатной плоскости $0uv$ областью интегрирования является ромб, изображённый на рис. 20.

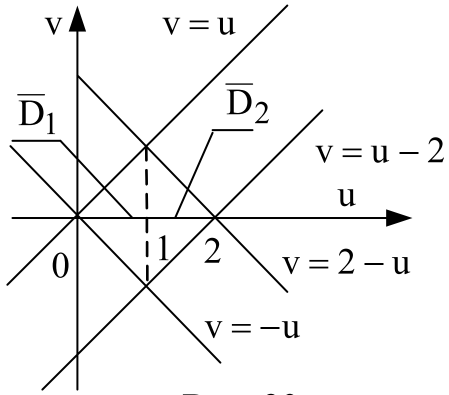

Рис. 20

Разобьём область интегрирования на две части $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$. В области $\overline{D}_1$: $u\in[0,1]$, а v изменяется от $v=-u$ до $v=u$. В области $\overline{D}_2$: $u\in[1,2]$, а v изменяется от $v=u-2$ до $v=2-u$. Следовательно,

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\frac{1}{2}\left(\iint_{\overline{D}_1} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dudv+\iint_{\overline{D}_2} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dudv\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 du\int_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv+\int_1^2 du\int_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv\right)$$

Замечание. Часто при решении конкретных задач удобно использовать вместо (3.17) ***обобщённые полярные координаты*** в виде: $x=a\rho\cos^{\alpha}\varphi,\ y=b\rho\sin^{\alpha}\varphi,(\rho\geq 0)$, где a,b,α — надлежащим образом подобранные постоянные числа. В этом случае

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}x'_\rho & y'_\rho\\ x'_\varphi & y'_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos^{\alpha}\varphi & b\sin^{\alpha}\varphi\\ -a\rho\alpha\cos^{\alpha-1}\varphi\sin\varphi & b\rho\alpha\sin^{\alpha-1}\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}= \tag{3.18}$$

$$=\alpha ab\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \alpha ab\iint\limits_{\overline{G}} f\left(a\rho\cos^{\alpha}\varphi, b\rho\sin^{\alpha}\varphi\right)\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi d\rho d\varphi \quad (3.19)$$

Пример 3.7. Произведя соответствующую замену переменных интегрирования, свести к повторному двойной интеграл:

$\iint\limits_{\overline{D}} f\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dxdy$, где область интегрирования $\overline{D}$, ограничена линиями $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$, $x=0$, $y=0$, $(x>0,\ y>0)$.

► Воспользуемся обобщёнными полярными координатами в виде $x = a\rho\cos^2\varphi$, $y = b\rho\sin^2\varphi$. В соответствии с (3.18) якобиан $J(\rho,\varphi) = 2ab\rho\cos\varphi\sin\varphi$.

Имеем

1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = \frac{a\rho\cos^2\varphi}{a}+\frac{b\rho\sin^2\varphi}{b} = \rho\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) = \rho$;

2) линия $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ перейдёт в кривую $\rho = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}$;

3) линия $x=0$ перейдёт в луч $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

4) линия $y=0$ перейдёт в луч $\varphi = 0$.

Следовательно,

$$\iint\limits_{\overline{D}} f\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dxdy = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}} f(\rho)\rho d\rho \quad .$$

4. Приложения двойных интегралов

4.1. Вычисление площади плоской фигуры

В соответствии со **свойством 1** двойных интегралов площадь S фигуры, ограниченной простым замкнутым контуром Γ, может быть найдена по формуле

$$S = \iint\limits_{\overline{D}} dxdy\,, \qquad (4.1)$$

где $\overline{D}$ — область, ограниченная контуром Γ.

Если при вычислении двойного интеграла осуществляется переход к новым координатам u и v, с помощью соотношений $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, то вместо (4.1) следует использовать формулу

$$S = \iint\limits_{\overline{G}} |J(u,v)|\, dudv\,, \qquad (4.2)$$

где $\overline{G}$ — отображение области $\overline{D}$ на плоскость $0uv$, а $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$ — якобиан перехода от декартовых координат (x,y) к криволинейным координатам (u,v).

Пример 4.1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами: $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$ (рис. 21).

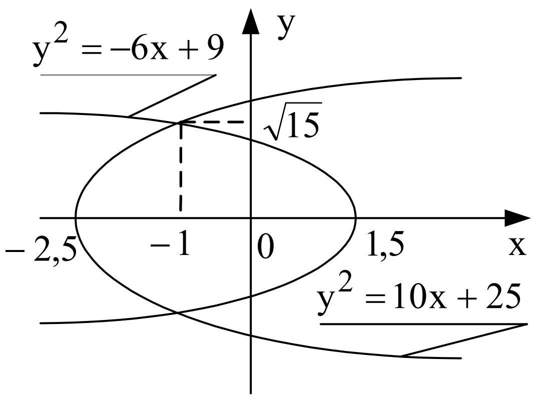

Рис. 21

►Найдём координаты точек пересечения парабол. Дл этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = 10x + 25 \\ y^2 = -6x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm\sqrt{15} \end{cases}.$$

Выразим из уравнений парабол переменную x и получим уравнение левой границы: $x = \dfrac{y^2 - 25}{10}$ и уравнение правой границы области интегрирования: $x = \dfrac{9 - y^2}{6}$. Кроме того, учтём, что область интегрирования симметрична относительно оси $0x$. Следовательно, площадь фигуры выражается интегралом

$$S=2\int\limits_0^{\sqrt{15}}dy\int\limits_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}}dx=2\int\limits_0^{\sqrt{15}}\left(\frac{9-y^2}{6}-\frac{y^2-25}{10}\right)dy=$$

$$=2\int\limits_0^{\sqrt{15}}\left(4-\frac{4y^2}{15}\right)dy=2\left(4y-\frac{4y^3}{45}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{15}}=\frac{16}{3}\sqrt{15}.$$

Пример 4.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100. \qquad (4.3)$$

►Введём новые переменные u и v с помощью соотношений

$$\begin{cases} u=x-2y+3 \\ v=3x+4y-1 \end{cases}. \qquad (4.4)$$

Тогда уравнение (4.3) примет вид $u^2+v^2=100$, т. е. в плоскости $0uv$ линия, определяемая соотношением (4.3), является окружностью радиуса 10 с центром в точке $(0,0)$.

Из соотношений (4.4) находим

$$\begin{cases} x=\dfrac{2u+v-5}{5} \\ y=\dfrac{v-3u+10}{10} \end{cases}. \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{2}{5},\ \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{5},\ \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{3}{10},\ \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{10},\ J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{2}{5} & \frac{-3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\end{vmatrix}=\frac{1}{10}.$$

Следовательно, в соответствии с (4.2) площадь фигуры равна

$$S=4\int\limits_0^{10}\frac{1}{10}du\int\limits_0^{\sqrt{100-u^2}}dv=\frac{2}{5}\int\limits_0^{10}\sqrt{100-u^2}\,du=\left|\begin{array}{l} u=10\sin t, du=10\cos t dt \\ u=0\Rightarrow t=0, u=10\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ \sqrt{100-u^2}=10\cos t \end{array}\right|=$$

$$=40\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=20\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=20\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=10\pi.$$

Замечание. Площадь круга $u^2+v^2\le 100$ равна 100π и в соответствии с (4.1) численно равна интегралу $\iint\limits_{u^2+v^2\le 100} dudv$.

Следовательно, площадь фигуры, ограниченной линией (4.3), может быть найдена следующим образом:

$$S=\iint\limits_{u^2+v^2\le 100} J(u,v)dudv=\frac{1}{10}\iint\limits_{u^2+v^2\le 100} dudv=\frac{1}{10}\cdot 100\pi=10\pi.$$

Пример 4.3. Найти площадь криволинейного четырёхугольника, ограниченного параболами $x^2=ay,\ x^2=by,\ y^2=\alpha x,\ y^2=\beta x$, при условии, что $0<a<b,\ 0<\alpha<\beta$ [8].

► Введём новые переменные u и v с помощью соотношений

$$\begin{cases} x^2=uy \\ y^2=vx \end{cases}. \tag{4.6}$$

Тогда парабола $x^2=ay$ отобразится в линию, уравнение которой в системе координат $0uv$, имеет вид $uy=ay\Rightarrow u=a$. Линия $u=a$ на плоскости $0uv$ — прямая, параллельная оси $0v$.

Аналогично, парабола $x^2=by$ отобразится в прямую $u=b$, парабола $y^2=\alpha x$ переёдёт в прямую $v=\alpha$, и, наконец, парабола $y^2=\beta x$ переёдёт в прямую $v=\beta$. Таким образом, соотношения (4.6) отображают криволинейный четырёхугольник в прямоугольник: $\begin{cases} a\le u\le b \\ \alpha\le v\le\beta \end{cases}$. Площадь этого прямоугольника равна $\sigma=(b-a)(\beta-\alpha)$.

Из соотношений (4.6) выразим x и y: $\begin{cases} x=\sqrt[3]{u^2v} \\ y=\sqrt[3]{v^2u} \end{cases}$.

Найдём частные производные и якобиан:

$$x'_u=\frac{2}{3}v^{\frac{1}{3}}u^{-\frac{1}{3}},\ x'_v=\frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}},\ y'_u=\frac{1}{3}v^{\frac{2}{3}}u^{-\frac{2}{3}},\ y'_v=\frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}v^{\frac{1}{3}}u^{-\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}v^{\frac{2}{3}}u^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.$$

Так как $J(u,v)=\frac{1}{3}=\text{const}$, то искомая площадь криволинейного четырёхугольника равна

$$S=J(u,v)\sigma=\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha).$$

Пример 4.4. Найти площадь криволинейного четырёхугольника, ограниченного прямыми $y=ax,\ y=bx,\ (0<a<b)$ и гиперболами $xy=\alpha,\ xy=\beta,\ (0<\alpha<\beta),\ (x>0,\ y>0)$.

► Введём новые переменные u и v с помощью соотношений

$$\begin{cases} xy=u \\ y=vx \end{cases}. \tag{4.7}$$

Тогда гиперболы $xy=\alpha,\ xy=\beta,\ (0<\alpha<\beta),\ (x>0,\ y>0)$ отобразятся на прямые $u=\alpha$ и $u=\beta$ соответственно. Прямые $y=ax,\ y=bx,\ (0<a<b)$ перейдут соответственно в прямые $v=a$ и $v=b$. Криволинейный четырёхугольник отобразится на плоскости $0uv$ в прямоугольник $\begin{cases} a\le v\le b \\ \alpha\le u\le\beta \end{cases}$.

Из соотношений (4.7) выразим x и y: $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv} \end{cases}$, $u>0,\ v>0$.

Найдём якобиан:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

Следовательно, искомая площадь криволинейного четырёхугольника равна

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}du\int_{a}^{b}\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}u\Big|_{\alpha}^{\beta}\ln|v|\Big|_{a}^{b}=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}.$$

Пример 4.5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиям $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1,\ x=0,\ y=0$ [3].

► Введём обобщённые полярные координаты ρ и φ с помощью соотношений $\begin{cases} x = a\rho\cos^8\varphi \\ y = b\rho\sin^8\varphi \end{cases}$.

Тогда в соответствии с (3.18) якобиан $J(\rho,\varphi) = 8ab\sin^7\varphi\cos^7\varphi$. Линия $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$ будет иметь уравнение $\sqrt[4]{\rho} = 1 \Rightarrow \rho = 1$. Это — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Прямая $y = 0$ отобразится в луч $\varphi = 0$.

Наконец, прямая $x = 0$ отобразится в луч $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, искомая площадь равна

$$S = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi\cos^7\varphi d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \frac{8ab}{128}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{ab}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 2\varphi\right)^3 \sin 2\varphi d\varphi = \left| \begin{matrix} t = \cos 2\varphi,\ dt = -2\sin 2\varphi d\varphi \\ \varphi = 0 \Rightarrow t = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -1 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{ab}{64}\int_1^{-1}\left(1 - t^2\right)^3 dt = \frac{ab}{32}\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{ab}{70}.$$

Пример 4.6. Найти площадь фигуры, располагающейся в правой полуплоскости и ограниченной линиями:

$$L_1 : \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right);\ L_2 : x^2 + y^2 = a^2,\ x > a,\ a > 0.$$

► Введём полярные координаты $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$.

Тогда в соответствии с (3.17) якобиан $J(\rho,\varphi) = \rho$. Линия L_1 в полярной системе координат будет иметь уравнение $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Это — лемниската Бернулли. Линия L_2 будет иметь уравнение $\rho = a$. Это — окружность радиуса a с центром в начале координат (рис. 22).

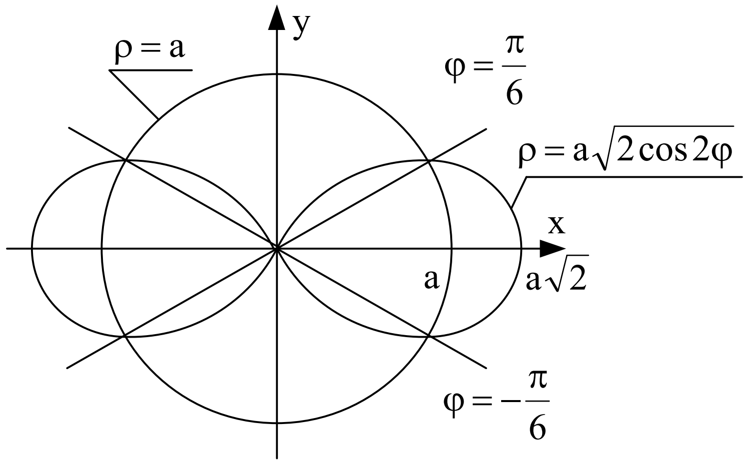

Рис. 22

Для нахождения точек пересечения линий L_1 и L_2 решим систему: $\begin{cases} \rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ \rho = a \end{cases} \Rightarrow \cos 2\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В правой полуплоскости располагаются только две точки пересечения линий L_1 и L_2. Эти точки соответствуют значению $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{6}$.

Взяв произвольное значение $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$, видим, что ρ при этом изменяется от $\rho = a$ до $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Учитывая ещё симметричность фигуры относительно оси абсцисс, получим

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \Big|_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(2a^2\cos 2\varphi - a^2\right) d\varphi =$$

$$= a^2(\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{6}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

Пример 4.7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$L_1 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;\ L_2 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4;$$

$$L_3 : \frac{x}{a} = \frac{y}{b};\quad L_4 : 3\sqrt{3}\,\frac{x}{a} = \frac{y}{b}\ \ (x > 0,\ y > 0).$$

► Введём обобщённые полярные координаты ρ и φ с помощью соотношений $\begin{cases} x = a\rho\cos^3\varphi \\ y = b\rho\sin^3\varphi \end{cases}$.

При такой замене переменных интегрирования:

1) уравнение линии L_1 преобразуется к виду $\rho^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow \rho = 1$;

2) уравнение линии L_2 преобразуется к виду $\rho^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow \rho = 8$;

3) уравнение линии L_3 преобразуется к виду $\mathrm{tg}^3\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$;

4) уравнение линии L_4 преобразуется к виду $\mathrm{tg}^3\varphi = 3\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$.

Так что на плоскости $0\rho\varphi$ область интегрирования $\overline{D}$ представляет прямоугольник $\begin{cases} 1 \le \rho \le 8 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$. В соответствии с (3.18) якобиан $J(\rho,\varphi) = 3ab\sin^2\varphi\cos^2\varphi$.

Следовательно, искомая площадь фигуры равна:

$$S = \iint\limits_{\overline{D}} J(\rho,\varphi)d\varphi d\rho = 3ab\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_1^8 \rho d\rho = \frac{3ab}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2\varphi \rho^2\Big|_1^8 d\varphi =$$

$$= \frac{189ab}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{189ab}{16}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{189ab}{16}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

4.2. Вычисление площади кривой поверхности

Пусть некоторая поверхность F задана явным уравнением

$$z = f(x,y), \tag{4.8}$$

где $f(x,y)$ — непрерывная вместе со своими частными производными $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ в области $\overline{D}$ функция. Будем считать, что область $\overline{D}$ ограничена простым контуром.

Уравнение плоскости, касательной к поверхности F в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $(z_0 = f(x_0, y_0))$, имеет вид [2]:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (4.9)$$

Если α, β, γ — углы, которые образует нормаль к поверхности F в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $(z_0 = f(x_0, y_0))$ с осями координат, то

$$\cos\alpha = \frac{f'_x}{\pm\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}; \cos\beta = \frac{f'_y}{\pm\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}};$$
$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}; \quad (4.10)$$

В формулах (4.10) все частные производные вычисляются в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Выбор знака перед радикалом определяется выбором направления на нормали. Например, если нормаль составляет острый угол с осью $0z$, то $\cos\gamma > 0$, и перед радикалом надо взять знак минус.

Произвольной сетью простых кривых разобьём область $\overline{D}$ на n частичных областей $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$.

Обозначим через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ площади этих частей, а их диаметры — $d_1, d_2, \ldots, d_n$, и пусть $\lambda = \max\limits_k d_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — ранг разбиения. Взяв в качестве направляющих простые кривые, разбивающие область $\overline{D}$ на части, построим цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси $0z$. Эти цилиндрические поверхности разобьют также и поверхность F на части $F_1, F_2, \ldots, F_n$. На каждой части F_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ возьмём произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и построим в этих точках касательные к поверхности Fплоскости. Теперь продолжим цилиндрические поверхности до пересечения с построенными касательными плоскостями. Тогда на этих плоскостях вырежутся плоские области $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \ldots, \widetilde{F}_n$.

Предположим, что площади областей $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \ldots, \widetilde{F}_n$ равны $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

Под *площадью кривой поверхности* F принято понимать предел

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k. \quad (4.11)$$

Частичные области $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$ являются проекциями областей $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \ldots, \widetilde{F}_n$ на плоскость $0xy$. Поэтому площади этих областей связаны соотношениями

$$\Delta S_k = \frac{\Delta\sigma_k}{\cos\psi_k}, \tag{4.12}$$

где ψ_k — угол между плоскостью $0xy$ и плоскостью, касательной к поверхности F в точке M_k. Но угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям $[7]$. Следовательно,

$$\cos\psi_k = \cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f'_x(x_k,y_k)\right)^2+\left(f'_y(x_k,y_k)\right)^2}}. \tag{4.13}$$

Подставим теперь соотношения (4.12) и (4.13) в выражение (4.11).

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'_x(x_k,y_k)\right)^2+\left(f'_y(x_k,y_k)\right)^2}\,\Delta\sigma_k. \tag{4.14}$$

Сумма, стоящая в правой части (4.14) является интегральной суммой Римана для двойного интеграла по области $\overline{D}$ от непрерывной функции $\sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2+\left(f'_y(x,y)\right)^2}$. Следовательно,.

$$S = \iint\limits_{\overline{D}}\sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2+\left(f'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy. \tag{4.15}$$

Замечание.

Формула (4.15) может быть записана также и в виде

$$S = \iint\limits_{\overline{D}}\frac{dxdy}{\left|\cos\gamma(x,y)\right|}. \tag{4.16}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда поверхность задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v). \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{4.17}$$

Будем считать, что функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v$ в некоторой области $\overline{H}$ плоскости $0uv$.

Предположим ещё, что хотя бы один из трёх определителей

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}, \tag{4.18}$$

всюду в области $\overline{H}$ не равен нулю. Тогда из системы (4.16) всегда можно выразить переменные u и v как функции одной из трёх пар переменных (x, y), (y, z) или (z, x). Например, если $C \neq 0$, то из первых двух уравнений системы (4.16) можно получить

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \tag{4.19}$$

причём функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные u'_x, u'_y, v'_x, v'_y в некоторой области $\overline{D}$ плоскости $0xy$ [1]. Подставив выражения (4.19) в третье уравнение системы (4.17), получим

$$z = f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)). \tag{4.20}$$

Функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в области $\overline{D}$. Площадь поверхности, определяемой уравнением (4.20), вычисляется по формуле (4.16). В двойном интеграле, который находится в правой части выражения (4.16), сделаем замену переменных, положив $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$.

Опуская некоторые подробности такой замены, в итоге получим

$$S = \iint\limits_{\overline{H}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du dv. \tag{4.21}$$

Замечания 1. Если бы вместо предположения $C \neq 0$, считать, что $A \neq 0$ или $B \neq 0$, то для площади поверхности, задаваемой параметрическими уравнениями (4.17), получилась точно такая же формула (4.21). Таким образом, соотношение (4.21) справедливо и тогда, когда область $\overline{H}$ разлагается на конечное число частей, в каждой из которых отличен от нуля хотя бы один их трёх определителей (4.18).

2. Если ввести обозначения

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2; G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$$

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_u + z'_u z'_v,$$

то формула (4.21) принимает вид

$$\iint\limits_{\overline{H}} \sqrt{EG - F^2}\, du dv, \tag{4.22}$$

(E, G, F называются *коэффициентами Гаусса).*

Пример 4.8. Вычислить площадь той части поверхности $z=\sqrt{2xy}$, проекцией которой на плоскость $z=0$ является прямоугольник $\overline{P}=\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 6\end{cases}$ [8].

► Имеем

$$z'_x=\sqrt{\frac{y}{2x}},z'_y=\sqrt{\frac{x}{2y}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{z}{2y}}=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}.$$

Следовательно,

$$S=\iint\limits_{\overline{P}}\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dxdy=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^3\frac{dx}{\sqrt{x}}\int\limits_0^6\left(\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{y}}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^3\left(2x\sqrt{y}+\frac{2}{3}y\sqrt{y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=6}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^3\left(2x\sqrt{6}+4\sqrt{6}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$=\sqrt{3}\int\limits_0^3\left(2\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=2\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^3=2\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}3\sqrt{3}+4\sqrt{3}\right)=36.$$

Пример 4.9. Найти площадь части конуса $z^2=x^2+y^2$, лежащей над плоскостью $0xy$ и отсечённой плоскостью $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

►Продифференцируем соотношение $z^2=x^2+y^2$ по x, получим $2zz'_x=2x\Rightarrow z'_x=\frac{x}{z}$. Аналогично $z'_y=\frac{y}{z}$. Следовательно,

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{2z^2}{z^2}}=\sqrt{2}.$$

Найдём уравнение проекции на плоскость $0xy$ линии пересечения конуса $z^2=x^2+y^2$ и плоскости $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$. Для этого исключим переменную z из системы:

$$\begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\end{cases}\Rightarrow 2\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=x^2+y^2\Rightarrow$$

$$(x-2)^2+2y^2=8. \qquad (4.23)$$

Введём обобщённые полярные координаты с помощью соотношений $\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\varphi \end{cases}$. В такой системе координат уравнение (4.23) принимает вид $\rho = \sqrt{8}$, т. е. представляет окружность радиуса $\sqrt{8}$ с центром в начале координат, а якобиан равен $\frac{1}{\sqrt{2}}\rho$. Таким образом, искомая площадь поверхности равна

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{2}\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} = 8\pi.$$

Пример 4.10. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключённой внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(b \le a)$ [3].

►Продифференцируем соотношение $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ по x, получим $2zz'_x + 2x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{x}{z}$. Аналогично $z'_y = -\frac{y}{z}$. Следовательно,

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Отметим, что внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(b \le a)$, заключена как часть верхней, так и нижней полусферы. Естественно, что площади обеих этих частей равны. Ясно также, что проекцией каждой из рассматриваемых частей сферы на плоскость $0xy$ является область $\overline{D}$, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Наконец, координатные оси $0x$ и $0y$ являются осями симметрии эллипса.

Следовательно, искомая площадь может быть найдена по формуле

$$\frac{1}{8}S=\iint\limits_{\overline{D}_1}\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \qquad (4.24)$$

где $\overline{D}_1$ — часть области $\overline{D}$, располагающаяся в первом квадранте.

При вычислении двойного интеграла (4.24) воспользуемся полярными координатами: $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$.

Тогда $\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-\rho^2}$, а уравнение эллипса приводится к виду

$$\rho=\rho_1=\frac{ab}{\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\sin^2\varphi}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{8}S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\rho_1}\frac{a\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=-a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\rho_1}\frac{d\left(a^2-\rho^2\right)}{2\sqrt{a^2-\rho^2}}=-a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_0^{\rho_1}d\varphi=$$

$$=-a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-\frac{a^2b^2}{b^2+\left(a^2-b^2\right)\sin^2\varphi}}-a\right)d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)\sin^2\varphi}{b^2+\left(a^2-b^2\right)\sin^2\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}+1-\cos^2\varphi}}\right)d\varphi=a^2\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-\cos^2\varphi}}d\varphi\right)=$$

$$=a^2\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\cos\varphi\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\Rightarrow$$

$$S=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right). \qquad (4.25)$$

Учитывая, что $\frac{\pi}{2} = \arcsin 1$, а также, если $xy > 0$, то $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$, соотношение (4.25) можно привести к виду

$$S = 8a^2 \arcsin\frac{b}{a}.$$

Пример 4.11. Найти площадь S поверхности тела, ограниченного двумя цилиндрами: $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$ [3].

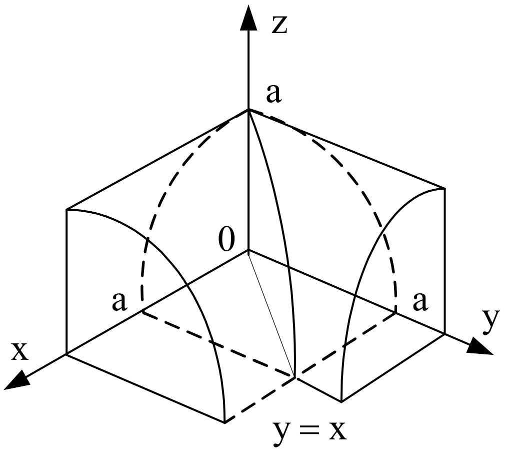

Рис. 23

►На рис. 23 изображена та часть поверхности тела, которая расположена в первом октанте. Эта часть поверхности состоит из двух кусков одинаковой площади. Один из этих кусков является цилиндрической поверхностью, которая задаётся уравнением $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ и проектируется на плоскость $0xy$ в треугольник $\overline{T} = \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le x \end{cases}$. Площадь s этого куска поверхности в соответствии с формулой (4.15) равна

$$s = \iint\limits_{\overline{T}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy,$$

где $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $z'_y = 0$, $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Следовательно,

$$s = a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^x dy = a\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - a\sqrt{a^2 - x^2}\Bigg|_0^a = a^2 \Rightarrow$$

$$S = 16s = 16a^2.$$

Пример 4.12. Найти площадь части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами, если радиус сферы равен R [3].

►Возьмём в трёхмерном пространстве $0xyz$ произвольную точку $M(x, y, z)$.

Сферическими координатами точки M называют тройку чисел (r,φ,ϑ), где r — расстояние от точки M до начала координат, φ — угол, отсчитываемый в плоскости 0xy от положительного направлении оси 0x против часовой стрелки, ϑ — угол, отсчитываемый от плоскости 0xy $\left(0<r<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ \ -\dfrac{\pi}{2}\le\vartheta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Связь между декартовыми и сферическими координатами точки M задаётся соотношениями (рис. 24):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta\ . \\ z = r\sin\vartheta \end{cases}$$

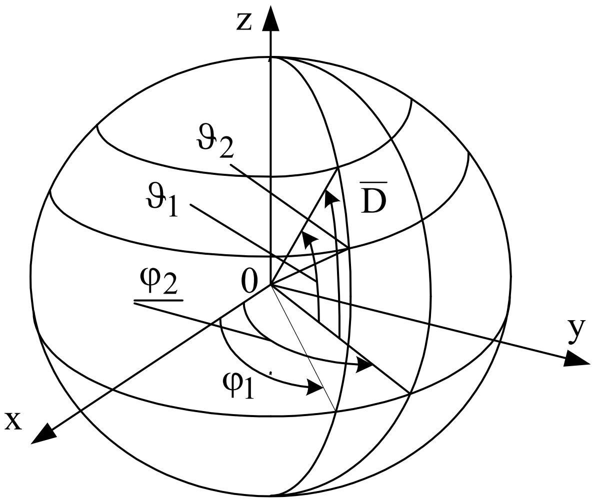

Рис. 24

Сфера радиуса R с центром в начале координат в сферической системе координат имеет уравнение $r = R$. Пусть параллели определяются уравнениями $\vartheta=\vartheta_1$ и $\vartheta=\vartheta_2$ $(\vartheta_1<\vartheta_2)$, а меридианы — уравнениями $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$. Тогда интересующая нас часть $\overline{D}$ сферы определяется соотношениями

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\cos\vartheta,\ \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2],\ \ \vartheta\in[\vartheta_1,\vartheta_2]. \\ z = R\sin\vartheta \end{cases} \tag{4.26}$$

В системе (4.26) в качестве параметров выступают переменные φ и ϑ. Так что для нахождения площади поверхности $\overline{D}$ нужно воспользоваться формулой (4.22).

Имеем

$x'_\varphi = -R\sin\varphi\cos\vartheta,\ \ x'_\vartheta = -R\cos\varphi\sin\vartheta,\ \ y'_\varphi = R\cos\varphi\cos\vartheta,$

$y'_\vartheta = -R\sin\varphi\sin\vartheta,\ \ z'_\varphi = 0,\ \ z'_\vartheta = R\cos\vartheta$

$$E=\left(x'_\varphi\right)^2+\left(y'_\varphi\right)^2+\left(z'_\varphi\right)^2=R^2\cos^2\vartheta,\quad G=\left(x'_\vartheta\right)^2+\left(y'_\vartheta\right)^2+\left(z'_\vartheta\right)^2=R^2,$$

$$F=x'_\varphi x'_\vartheta+y'_\varphi y'_\vartheta+z'_\varphi z'_\vartheta=0\Rightarrow\sqrt{EG-F}=R^2\cos\vartheta.$$

Следовательно,

$$S=\iint\limits_{D}R^2\cos\vartheta d\varphi d\vartheta=R^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\cos\vartheta d\vartheta=R^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\left(\sin\vartheta_2-\sin\vartheta_1\right).$$

Пример 4.13. Найти площадь части $\overline{G}$ геликоида: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi,\ z=h\varphi$, где $0<r<a,\ 0<\varphi<2\pi$ [3].

► Так как поверхность задана параметрическими уравнениями, то воспользуемся формулой (4.22).

$$x'_\varphi=-r\sin\varphi,\ x'_r=\cos\varphi,\ y'_\varphi=r\cos\varphi,\ y'_r=\sin\varphi,\ z'_\varphi=h,\ z'_r=0$$

$$E=\left(x'_\varphi\right)^2+\left(y'_\varphi\right)^2+\left(z'_\varphi\right)^2=r^2+h^2,\ \ G=\left(x'_\vartheta\right)^2+\left(y'_\vartheta\right)^2+\left(z'_\vartheta\right)^2=1,$$

$$F=x'_\varphi x'_\vartheta+y'_\varphi y'_\vartheta+z'_\varphi z'_\vartheta=0\ \Rightarrow\ \sqrt{EG-F}=\sqrt{r^2+h^2}.$$

$$S=\iint\limits_{\overline{G}}\sqrt{r^2+h^2}drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{r^2+h^2}dr=2\pi\int\limits_0^a\sqrt{r^2+h^2}dr. \qquad (4.27)$$

При вычислении интеграла, стоящего в правой части (4.27), применим формулу интегрирования по частям.

$$I=\int\limits_0^a\sqrt{r^2+h^2}dr=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{r^2+h^2},\ du=\dfrac{rdr}{\sqrt{r^2+h^2}}\\ dv=dr,\quad v=r\end{matrix}\right|=r\sqrt{r^2+h^2}\Big|_0^a-$$

$$-\int\limits_0^a\frac{r^2+h^2-h^2}{\sqrt{r^2+h^2}}dr=a\sqrt{a^2+h^2}-\int\limits_0^a\frac{r^2+h^2}{\sqrt{r^2+h^2}}dr+h^2\int\limits_0^a\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}dr=$$

$$=a\sqrt{a^2+h^2}-I+h^2\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)\Big|_0^a=a\sqrt{a^2+h^2}-I+$$

$$+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{|h|}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{|h|}\right).$$

Подставим найденное значение интеграла в (4.27) и получим

$$S=\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{|h|}\right).$$

4.3. Вычисление объёма цилиндроида

Под *цилиндроидом* принято понимать тело, ограниченное сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$, снизу плоскостью $z = 0$, а боковой поверхностью цилиндроида является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $0z$.

Предположим, что цилиндрическая поверхность вырезает в плоскости $z = 0$ квадрируемую область $\overline{D}_{xy}$.

Произвольной сетью простых кривых разобьём область $\overline{D}_{xy}$ на n частичных областей $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n$. Обозначим через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ площади этих частей, а их диаметры — $d_1, d_2, \ldots, d_n$, и пусть $\lambda = \max\limits_k d_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — ранг разбиения. Взяв в качестве направляющих простые кривые, разбивающие область $\overline{D}_{xy}$ на части, построим цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси $0z$. Эти цилиндрические поверхности разобьют поверхность $z = f(x, y)$ на n частей $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Цилиндроид при этом разобьётся на n частичных цилиндроидов с основаниями $\overline{D}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

На каждой части $\overline{D}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ возьмём произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и через эту точку проведём прямую l_k, параллельную оси $0z$. Прямая l_k пересечёт частичную поверхность F_k в точке $N_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Примем в качестве высоты h_k частичного цилиндроида длину отрезка $N_k M_k$: $h_k = |N_k M_k| = f(x_k, y_k)$. Тогда объём ΔV_k частичного цилиндроида будет равен $\Delta V_k \approx \Delta\sigma_k h_k = f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$.

Объёмом V цилиндроида называют предел

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k. \quad (4.28)$$

Сумма, стоящая в правой части (4.28), является интегральной суммой для двойного интеграла $\iint\limits_{\overline{D}_{xy}} f(x, y)\,dxdy$. Следовательно,

$$V = \iint\limits_{\overline{D}_{xy}} f(x, y)\,dxdy. \quad (4.29)$$

Замечание. Объём цилиндроида, у которого боковой поверхностью является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $0y$, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_{\overline{D}_{zx}} y(z,x)dzdx, \tag{4.30}$$

где $y = y(z,x) \geq 0$ — поверхность, ограничивающая сверху цилиндроид, а $\overline{D}_{zx}$ — ортогональная проекция этой поверхности на плоскость $0zx$.

Объём цилиндроида, у которого боковой поверхностью является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $0x$, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_{\overline{D}_{yz}} x(y,z)dydz, \tag{4.31}$$

где $x = x(y,z) \geq 0$ — поверхность, ограничивающая сверху цилиндроид, а $\overline{D}_{yz}$ — ортогональная проекция этой поверхности на плоскость $0yz$.

Пример 4.14. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x = 17\sqrt{5y},\ \ x = 2\sqrt{5y},\ \ z + y = \dfrac{1}{5},\ \ z = 0$.

► Проекция тела на плоскость $z = 0$, т. е. область $\overline{D}_{xy}$, показана на рис. 25, а само интересующее нас тело изображено на рис. 26.

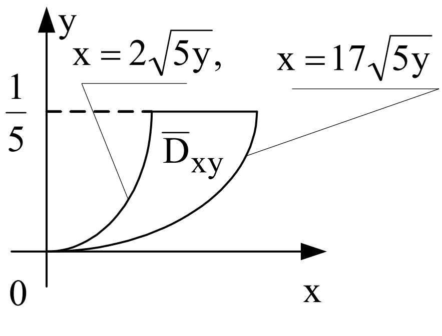

Рис. 25

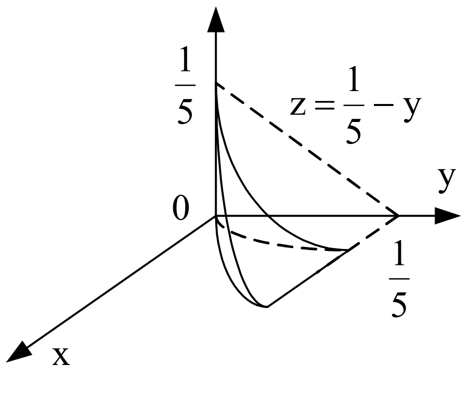

Рис. 26

По рис. 26 легко определить, что тело является цилиндроидом с образующими, параллельными оси $0z$. Сверху этот цилиндроид ограничен плоскостью $z = \dfrac{1}{5} - y$, параллельной оси $0x$. В соответствии с (4.29) объём тела равен

$$V=\iint\limits_{\overline{D}_{xy}}\left(\frac{1}{5}-y\right)dxdy=\int\limits_0^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}-y\right)dy\int\limits_{2\sqrt{5y}}^{17\sqrt{5y}}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}-y\right)\left(17\sqrt{5y}-2\sqrt{5y}\right)dy=$$

$$=15\sqrt{5}\int\limits_0^{\frac{1}{5}}\left(\frac{\sqrt{y}}{5}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy=15\sqrt{5}\left(\frac{2\cdot y^{\frac{3}{2}}}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{5}}=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{25}.$$

Пример 4.15. Найти объём тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью $2x+3y-12=0$ и цилиндром $z=\frac{y^2}{2}$.

►Образующая цилиндра $z=\frac{y^2}{2}$ параллельна оси $0x$. Следовательно, для нахождения объёма тела нужно воспользоваться формулой (4.31). Для построения проекции тела на координатную плоскость $0yz$ $(x=0)$ найдём линию пересечения плоскостей $2x+3y-12=0$ и $x=0$. Исключив x из системы $\begin{cases}x=0\\2x+3y-12=0\end{cases}$, получим $y=4$. Проекция тела на плоскость $x=0$, т. е. область $\overline{D}_{yz}$, показана на рис. 27, а само тело изображено на рис. 28. Сверху интересующее нас тело ограничено поверхностью (плоскостью) $x=6-\frac{3}{2}y$. В соответствии с (4.31) объём тела равен

$$V=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{\frac{y^2}{2}}\left(6-\frac{3}{2}y\right)dz=\int\limits_0^4\left(6-\frac{3}{2}y\right)\frac{y^2}{2}dy=\int\limits_0^4\left(3y^2-\frac{3}{4}y^3\right)dy=$$

$$=\left(y^3-\frac{3}{16}y^4\right)\Bigg|_0^4=64-\frac{3}{16}\cdot 256=16.$$

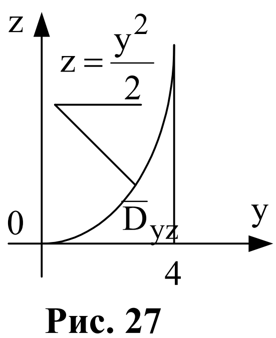

Рис. 27

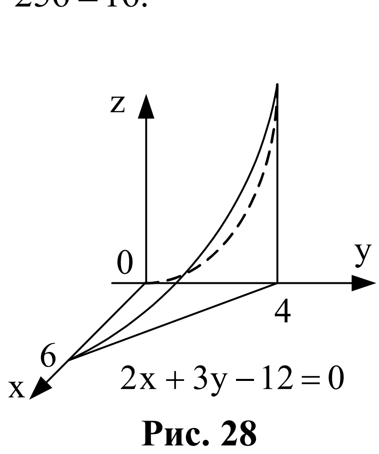

Рис. 28

Замечание. Анализ решений последних двух примеров показывает, что если ставить целью получение численного результата, то не всегда обязательно делать рисунок самого тела, объём которого требуется вычислить. Достаточно лишь сделать чертёж проекции тела на нужную координатную плоскость и определить уравнение поверхности, ограничивающей рассматриваемое тело сверху.

Пример 4.16. Найти объём тела, ограниченного цилиндром $z = 4 - x^2$, координатными плоскостями и плоскостью $2x + y = 4 \quad (x \ge 0)$ [9].

► Боковой поверхностью изучаемого тела является цилиндр $z = 4 - x^2$ с образующей, параллельной оси $0y$. Поэтому необходимо найти проекцию тела на координатную плоскость $y = 0$. Сначала исключим y из системы $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2$. Значит, проекция $\overline{D}_{zx}$ тела определяется соотношениями $\begin{cases} z = 4 - x^2 \\ x = 2, \ \ x \ge 0 \end{cases}$ и представлена на рис. 29. Сверху рассматриваемое тело ограничено плоскостью $y = 4 - 2x$.

Следовательно,

$$V = \int_0^2 (4 - 2x) dx \int_0^{4-x^2} dz = \int_0^2 (4 - 2x)\left(4 - x^2\right) dx = \int_0^2 \left(16 - 4x^2 - 8x + 2x^3\right) dx =$$

$$= \left(16x - \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 + \frac{2}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = 32 - \frac{32}{3} - 16 + 8 = \frac{40}{3}.$$

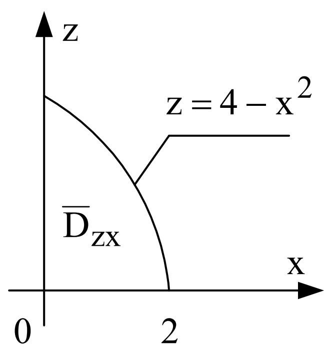

Рис. 29

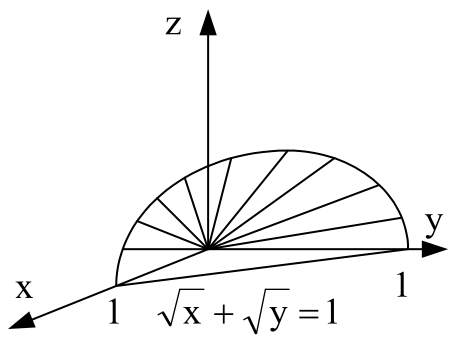

Рис. 30

Пример 4.17. Найти объём тела, ограниченного конической поверхностью $z = \sqrt{xy}$, цилиндром $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ и плоскостью $z = 0$ [9].

► Рассматриваемый цилиндроид показан на рис. 30. Его боковой поверхностью является цилиндр $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ с образующей, параллельной оси $0z$, который отсекает в первом квадранте криволинейный треугольник. Переменная y изменяется от $y=0$ до $y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$ при изменении x от $x=0$ до $x=1$.

Следовательно, объём тела равен

$$V=\int_0^1\sqrt{x}dx\int_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\sqrt{y}dy=\int_0^1\sqrt{x}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{y=0}^{y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2}dx=\frac{2}{3}\int_0^1\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^3dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(\sqrt{x}-3x+3x^{\frac{3}{2}}-x^2\right)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^2+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg\|_0^1=\frac{1}{45}.$$

Пример 4.18. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z=c\cdot arctg\frac{y}{x},\ z=0,\sqrt{x^2+y^2}=a\cdot arctg\frac{y}{x}\ (y\ge 0),\quad a,c>0$ [3].

► Прежде всего, отметим следующее. Так как $\sqrt{x^2+y^2}\ge 0$ и $a>0$, то из соотношения $\sqrt{x^2+y^2}=a\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ следует, что $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ge 0$. Поэтому $\frac{y}{x}\ge 0$, т.е. переменные x и y принимают значения одного знака. А так как по условию $y\ge 0$, то и $x>0$. Значит, проекция $\overline{D}_{xy}$ на плоскость $0xy$ поверхности $z=c\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, ограничивающей сверху цилиндроид, располагается в первой четверти. Следовательно, объём тела равен

$$V=c\iint\limits_{\overline{D}_{xy}}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy. \qquad (4.32)$$

При вычислении интеграла (4.32) перейдём к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$. В этом случае якобиан перехода к новым координатам $J(\rho,\varphi)=\rho$. Уравнение $\sqrt{x^2+y^2}=a\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ (y\ge 0)$ преобразуется к виду $\rho=a\cdot\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)$. Учтём ещё, что $\begin{cases}x>0\\ y\ge 0\end{cases}$, т. е. $0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$. Тогда получаем, что $\rho=a\varphi$. На плоскости $0\rho\varphi$ это уравнение представляет отрезок спирали Архимеда. Концы этого отрезка располагаются в точках $\varphi=0$, $\rho=0$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $\rho=a\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$V=c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\varphi}\rho\varphi d\rho=c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\varphi}d\varphi=\frac{ca^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^3d\varphi=\frac{ca^2}{2}\frac{\varphi^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^4a^2c}{128}.$$

Пример 4.19. Найти объём цилиндроида, ограниченного сверху параболоидом $\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$, снизу — плоскостью $z=0$, и боковой поверхность которого является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $0z$. Эта цилиндрическая поверхность высекает в плоскости $z=0$ астроиду $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

► Получим уравнение линии пересечения параболоида и координатной плоскости $0xy$. Для этого исключим переменную z из системы уравнений $\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{z}{c}=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Как видим, получился эллипс с полуосями a и b. Астроида является вписанной в этот эллипс (рис. 31). Поэтому проекцией цилиндроида на плоскость $0xy$ является область, обозначенная на рис. 31 как $\overline{D}_{xy}$.

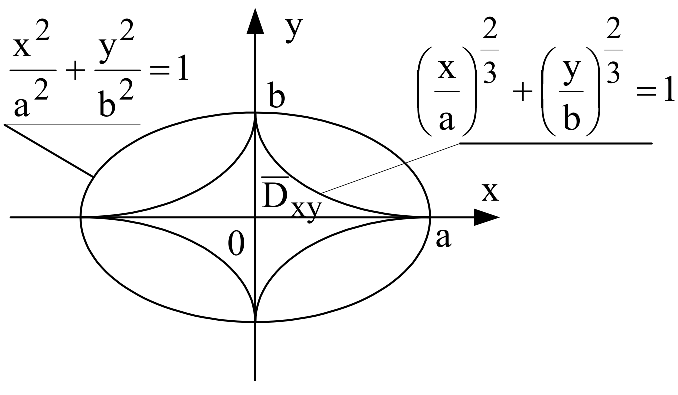

Рис. 31

В соответствии с (4.29) объём цилиндроида равен

$$V = \iint\limits_{\overline{D}_{xy}} c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)dxdy. \qquad (4.33)$$

При вычислении интеграла (4.33) перейдём к обобщённым полярным координатам: $x = a\rho\cos^3\varphi,\ y = b\rho\sin^3\varphi$. В этом случае в соответствии с (3.18) якобиан перехода к новым координатам $J(\rho,\varphi) = 3ab\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Уравнение астроиды преобразуется к виду

$$\left(\frac{a\rho\cos^3\varphi}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\rho\sin^3\varphi}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftrightarrow \rho^{\frac{2}{3}}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

Подынтегральная функция $f(x,y) = c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ превратится в функцию $f\left(a\rho\cos^3\varphi, b\rho\sin^3\varphi\right) = c\left(1 - \rho^2\left(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi\right)\right)$. Далее воспользуемся формулой для суммы кубов двух чисел, квадрата суммы двух чисел и основного тригонометрического тождества и получим $\cos^6\varphi + \sin^6\varphi = 1 - 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Значит, подынтегральная функция приводится к виду $f(\rho,\varphi) = c\left(1 - \rho^2\left(1 - 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)\right)$. Учтём ещё симметрию области $\overline{D}_{xy}$.

Следовательно,

$$\frac{V}{4} = 3abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho\left(1 - \rho^2\left(1 - 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)\right)d\rho =$$

$$= 3abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\left(1 - 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1}d\varphi =$$

$$= 3abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\right)\right)d\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{V}{4} = \frac{3abc}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\sin^2 2\varphi + 3\sin^4 2\varphi\right)d\varphi. \qquad (4.34)$$

Имеем

$$4\sin^2 2\varphi+3\sin^4 2\varphi=2(1-\cos 4\varphi)+\frac{3}{4}(1-\cos 4\varphi)^2=$$

$$\frac{11}{4}-\frac{7}{2}\cos 4\varphi+\frac{3}{4}\cdot\frac{1+\cos 8\varphi}{2}=\frac{25}{8}-\frac{7}{2}\cos 4\varphi+\frac{3}{8}\cos 8\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{V}{4}=\frac{3abc}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{25}{8}-\frac{7}{2}\cos 4\varphi+\frac{3}{8}\cos 8\varphi\right)d\varphi=\frac{3abc}{64}\cdot\frac{25}{8}\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{75abc\pi}{64\cdot 16}\Rightarrow$$

$$V=\frac{75\pi abc}{256}.$$

Пример 4.20. Найти объём тела, ограниченного верхней полусферой $\frac{z}{c}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ и верхней частью конической поверхности $\frac{z}{c}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ $(a,\ b,\ c>0)$.

► Найдём проекцию рассматриваемого тела на плоскость $0xy$. Для этого исключим переменную z из системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{z}{c}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\\ \frac{z}{c}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}.$$

В результате получим область $\overline{D}_{xy}$, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$. Объём изучаемого тела равен разности объёмов двух цилиндроидов, один из которых сверху ограничен полусферой, а другой конусом. Каждый из этих цилиндроидов проектируется на плоскость $0xy$ в область $\overline{D}_{xy}$.

Следовательно,

$$V=c\iint\limits_{\overline{D}_{xy}}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy. \qquad (4.35)$$

При вычислении интеграла (4.35) перейдём к обобщённым полярным координатам: $x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi$. В этом случае якобиан перехода к новым координатам $J(\rho,\varphi) = ab\rho$. Уравнение верхней полусферы примет вид $z = c\sqrt{1-\rho^2}$, уравнение верхней части конуса станет $z = c\rho$, а уравнение эллипса превратится в $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Учтём также симметрию каждого цилиндроида относительно координатных плоскостей. Тогда

$$\frac{V}{4} = abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho\left(\sqrt{1-\rho^2} - \rho\right) d\rho = \frac{\pi abc}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^2 d\rho\right) =$$

$$= \frac{\pi abc}{2}\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-\rho^2}\, d\left(1-\rho^2\right) - \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$-\frac{\pi abc}{6}\left(\left.\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi abc}{6}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi abc\left(2-\sqrt{2}\right)}{12}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{\pi abc\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}.$$

Пример 4.21. Найти объём тела, ограниченного параболоидом $z = 8 - 6\left((x+1)^2 + y^2\right)$ и плоскостью $z = -12x - 4$ [6].

► Найдём проекцию рассматриваемого тела на плоскость $0xy$. Для этого исключим переменную z из системы уравнений

$$\begin{cases} z = -12x - 4 \\ z = 8 - 6\left((x+1)^2 + y^2\right) \end{cases} \Rightarrow -12(x+1) = -6(x+1)^2 - 6y^2.$$

Упростив последнее уравнение, получим $6\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0$. Это окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Так что проекцией $\overline{D}_{xy}$ тела на плоскость $0xy$ является круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Объём изучаемого тела равен разности объёмов двух цилиндроидов, один из которых сверху ограничен параболоидом, а другой плоскостью. Каждый из этих цилиндроидов проектируется на плоскость $0xy$ в область $\overline{D}_{xy}$. Следовательно,

$$V = \iint\limits_{\overline{D}_{xy}} \left(8 - 6\left((x+1)^2 + y^2\right) - (-12x - 4)\right) dxdy = \iint\limits_{\overline{D}_{xy}} \left(6\left(1 - x^2 - y^2\right)\right) dxdy \qquad (4.36)$$

При вычислении интеграла (4.36) перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. В этом случае якобиан перехода к новым координатам $J(\rho,\varphi) = \rho$. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ преобразуется к виду $\rho = 1$. Подынтегральная функция $f(x,y) = 6\left(1 - x^2 - y^2\right)$ превратится в функцию $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 6\left(1 - \rho^2\right)$. Вернувшись к (4.36), получим

$$V = 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1 - \rho^2\right)\rho d\rho = 12\pi\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 12\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 3\pi .$$

Список литературы

1. Ильин В. А. Основы математического анализа. Ч. 2 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, 7-е изд. М.: Физматлит, 2009. 648 с.
2. Хватцев А. А. Математический анализ: конспект лекций / А. А. Хватцев. 2-е изд. Псков: Издательство ППИ, 2008. 132 с.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие/ Б. П. Демидович. 13-е изд., испр. М.: Издательство Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. 624 с.
4. Аксёнов А. П. Математический анализ. (Интегралы, зависящие от параметра. Двойные интегралы. Криволинейные интегралы): учебное пособие/ А. П. Аксёнов. СПб.: Издательство «НЕСТОР», 2000. 145 с.
5. Хватцев А. А. Интегральное исчисление функций одного аргумента: учебное пособие / А. А. Хватцев. Псков: Псковский государственный университет, 2013. 100 с.
6. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчёты) / Л. А. Кузнецов. 9-е изд., стереотипное. СПб.: Издательство «Лань», 2007. 238 с.
7. Хватцев А. А. Алгебра и геометрия: учебное пособие / А. А. Хватцев. Псков: Издательство ППИ, 2008. 79 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / Под ред. Демидовича Б. П. М.: Физматлит, 2001. 472 с.
9. Берман Г. Н. Сборник заданий по курсу математического анализа/ Г. Н. Берман. 22-е изд., перераб. СПб.: Издательство «Профессия», 2001. 432 с.

Для заметок

Учебное издание

Хватцев Александр Алексеевич

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
И ИХ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Технический редактор: А. А. Хватцев
Компьютерная верстка: А. А. Хватцев, Н. А. Васильева
Корректор: С. Н. Емельянова

Подписано в печать 28.04.2016. Формат 60×90/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. п. л. 5,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 5176.

Изготовлено на Versant 2100.

Адрес издательства:
Россия, 180000, Псков, ул. Л. Толстого, 4[а], корп. 3[а].
Издательство Псковского государственного университета

ISBN 978-5-91116-433-1